



---

UNIVERZITET U BEOGRADU  
Elektrotehnički fakultet  
Katedra za signale i sisteme

---

# MASTER RAD

**Upoređivanje efikasnosti ICA algoritama za  
uklanjanje EKG šuma iz EEG signala kod  
novorođenčadi**

Mentor:  
**Prof. dr Mirjana Popović**

Autor:  
**Vladimir Matić 3054/07**

Beograd, februar 2010.

## *LISTA SKRAĆENICA*

- CCA – Canonical Correlation Analysis
- BSS – Blind Source Separation
- ICA – Independent Component Analysis
- EEG – Elektroencefalogram
- EKG – Elektrokardiogram
- JADE – Joint Approximation Diagonalization of Eigen–matrices
- SOBI – Second Order Blind Identification
- PCA – Principal Component Analysis
- SVD – Singular Value Decomposition

## LISTA SLIKA

- Slika 2.1. Blok dijagram kojim je predstavljena osnova problema za rešavanje ICA metodom..... 5
- Slika 2.2. Ilustracija osnovnih etapa kod primene ICA metode. Preuzeto iz [16].....7
- Slika 2.3. Deblja linija predstavlja jedinični krug  $q_1^2 + q_2^2 = 1$ , dok tanke krive predstavljaju izolinije funkcije  $F(q_1, q_2)$ . Preuzeto iz [4].....14
- Slika 2.4. Originalni signali  $s_1$  i  $s_2$ .....17
- Slika 2.5. Izmiksovani originalni signali snimljeni na mikrofONU  $x_1$  i  $x_2$ .....17
- Slika 2.6. Estimirani signali korišćenjem ICA metode.....17
- Slika 2.7. Združena raspodela nezavisnih komponenti  $s_1$  i  $s_2$  sa uniformnom raspodelom. Horizontalna osa:  $s_1$ , vertikalna osa:  $s_2$ .....18
- Slika 2.8. Združena raspodela miksujućih komponenti  $x_1$  i  $x_2$ . Horizontalna osa:  $x_1$ , vertikalna osa:  $x_2$ .....18
- Slika 2.9. Združena raspodela **izbeljenih** miksujućih komponenti  $x_1$  i  $x_2$  sa slike 2.8. ....19
- Slika 4.1. Četiri tipična dominantna moždana signala. Preuzeto iz [6].....29
- Slika 4.2. Konvencionalni sistem 10–20 koji određuje položaje elektroda. A–pogled sa leve strane glave. B–pogled odozgo. Preuzeto iz [6].....29
- Slika 4.3. Niskoamplitudni tip “*depressed brain discharge*” na kanalima **C3–O1** i **FP1–T3**. Preuzeto iz [6].....31
- Slika 4.4. Učestali kompleks sporih talasa sa utisnutim visokim frekvencijama na svim kanalima. Preuzeto iz [6].....31
- Slika 4.5. Periodični brzi prelazi–pikovi na kanalima **FP2–C4** i **C4–O2**. Preuzeto iz [6].....31
- Slika 4.6. Standardni oblik EKG signala. Preuzeto iz [18].....32
- Slika 5.1. Proces uklanjanja EKG artefakta iz EEG signala korišćenjem ICA metode.....34
- Slika 5.2. Prikaz EEG signala i kanali na kojima se vidi prisustvo EKG artefakta.....36

- Slika 5.3. Estimirane nezavisne komponente segmenta EEG-a sa slike 5.2 korišćenjem CCA algoritma.....36
- Slika 5.4. Estimirane nezavisne komponente segmenta EEG-a sa slike 5.2 korišćenjem JADE algoritma.....37
- Slika 5.5. Estimirane nezavisne komponente segmenta EEG-a sa slike 5.2 korišćenjem SOBI algoritma.....37
- Slika 5.6. EKG artefakti koji se pojavljuju u EEG signalu koji su korišćeni u simulacijama. Na kanalima T5-O1 i Fz-Pz vidi se očigledna korelisanost sa QRS kompleksom signala EKG-a.....39
- Slika 5.7. Simultano snimljeni signal EKG-a u kome se jasno vidi izražen QRS kompleks.....39
- Slika 5.8. Uvećani deo EKG signala, kako bi se uočio QRS kompleks i R talas koji kreira globalni maksimum.....40
- Slika 5.9. Modelovani EKG artefakti koji se superponiraju na EEG signal. Gornja slika predstavlja sinusoidu, dok je na donjoj predstavljena povorka impulsa. Preuzeto iz [9].....40
- Slika 5.10. Prikaz jednog kanala EEG signala: čist EEG signala (plavo) i EEG signal sa superponiranim artefaktom povorka impulsa (crveno).....41
- Slika 5.11. Prikaz jednog kanala EEG signala: čist EEG signal (plavo) i EEG signal sa superponiranim sinusoidalnim artefaktom (crveno).....42
- Slika 5.12. Blok dijagram algoritma za upoređivanje efikasnosti ICA algoritama.....45

# 1. Uvod

## 1.1. Cilj rada

Signal elektroencefalograma – EEG prvi put je snimljen na ljudima 1929. godine od strane naučnika Hansa Bergera. Ovaj električni signal dobija se neinvanzivnim metodama uz pomoć elektroda koje se postavljaju na površinu glave. U sebi sadrži informacije koje potiču od električnih aktivnosti iz kore velikog mozga. Sam signal EEG–a je često značajno degradiran usled prisustva šuma koji su utisnuti u ovaj signal. Obrada ovog signala je još uvek veoma komplikovana i u digitalnoj obradi signala i dalje predstavlja veliki izazov. Stalno se vrše nova istraživanja i pokušaji da se što uspešnije iz EEG signala ukloni šum, a da se potom iz čistog EEG–a dobije još veći broj korisnih informacija koji će tačnije i pouzdanije opisati same moždane aktivnosti i ukazati na eventualne abnormalnosti. Jedna od popularnih metoda koja se danas sve češće koristi u obradi EEG signala je analiza nezavisnih komponentata (*Independent Component Analysis* – ICA).

Osnovni zadatak ovog master rada je određivanje efikasnosti *Independent Component Analysis* (ICA) algoritama koji dekomponuju elektroencefalogramski (EEG) signal sa ciljem da se odstrani šum koji potiče od elektrokardiografskog (EKG) signala. Uklanjanje šuma i ponovna rekonstrukcija EEG signala može da doprinese unapređenju, na primer, sistema za odlučivanje koji treba da detektuje epileptički napad kod novorođenčeta. Preciznije uklanjanje šuma EKG–a je naročito važno jer je morfološki oblik ovog artefakta veoma sličan EEG signalima koji se javljaju u toku epileptičkih napada. Ukoliko se ne koristi adekvatan ICA algoritam, može se dogoditi da se posle procesa dekomponovanja uklone i bitni delovi EEG signala koji nose informacije o moždanoj aktivnosti. Na taj način se može propustiti i detekcija samog epileptičkog napada. Takođe, izborom odgovarajućeg ICA algoritma može da se smanji i broj lažnih detekcija epileptičkih napada što bi doprinelo unapređenju postojećih metoda.

Predmet analize su signali snimljeni 20–kanalnim standardnim EEG odvodima (10–20) na novorođenčadima. U praksi ovi signali često sadrže EKG šum koji je potrebno ukloniti (npr. ukoliko je EEG elektroda u blizini krvnog suda). Samo uklanjanje šuma EKG–a vrši se primenom ICA algoritama. Cilj ovog rada je da se od postojećih najzastupljenijih ICA algoritama izabere onaj koji će za ovu primenu biti najsvrsishodniji. Kako sam šum EKG–a nije poznat, da bi se rezultati mogli kvantifikovati, u radu će se koristiti veštački generisani EKG artefakti. Ovi signali se prvobitno modeluju, a zatim i superponiraju na nezašumljene EEG signale.

## 1.2. Nastanak ICA teorije

Prvi značajniji teorijski osnovi Analize nezavisnih komponenata postavljeni su početkom devedesetih godina XX veka. Uporedo sa teorijom počeli su da se razvijaju i prvi ICA algoritmi koji su našli svoju primenu u raznim tehnološkim oblastima. Generalnu postavku ICA teorije definisao je Pierre Comon 1994. godine [11]. Ona je opisana kao metod za razdvajanje (separaciju) multivarijabilnog signala na nezavisne podkomponente. Pri tome se pretpostavlja da su izvorne (miksujuće) komponente statistički međusobno nezavisne i da je njihova raspodela negausovska. Već 1995. Tony Bell i Christian Jutten kreirali su brz i efikasan ICA algoritam Infomax [17]. Ovaj algoritam kasnijih godina je unapređen i poboljšan korišćenjem *prirodnog gradijenta* u iterativnom delu.

Do danas je razvijeno više od dvadeset ICA algoritama. Jedan od najčešće korišćenih je FastICA algoritam koji koristi *kurtosis* u kriterijumskoj funkciji, a predložen je od strane Aapo Hyvarinen-a i Erkki Oja-e [4]. Pored FastICA-e, razvijeni su i mnogi drugi algoritmi sa različitim pristupima. Po svojoj strukturi oni najviše podsećaju na Infomax algoritam, ali zadržavaju i svoj jedinstven doprinos u zavisnosti na prirodu signala na koji se primenjuju. Ovi algoritmi rešavanje ICA problema uglavnom baziraju na [4] maksimalnoj verovatnoći (*maximum likelihood*), traženju projekcija (*projection pursuit*) ili na *negentropy*-ji, a postoje i Bussgang-ove metode u kojima se koriste kumulanti.

RobustICA algoritam predstavlja unapređenu verziju FastICA algoritma. Razvijen je od V. Zarzoso-a i P. Comon-a [2] i zasniva se na modifikaciji FastICA algoritama. Zadržan je pristup ekstrakovanja nezavisnih komponenti "jedna po jedna" (*deflation-based implementation*), a iterativni proces koristi *exact line search* optimizaciju. Algoritam SOBI (Second Order Blind Identification) predstavlja separacionu tehniku koja se zasniva na statistici drugog reda. Sam algoritam kreirali su autori A. Belouchrani, K. Abed-Meraim i J. F. Cardoso [3]. Ovaj algoritam postao je veoma popularan i značajno je zastupljen u praksi. Autori J. F. Cardoso i A. Souloumiac razvili su JADE (Joint Approximation Diagonalization of Eigen matrices) algoritam koji je predstavljen u [7]. Ovaj algoritam uvodi novi metod dijagonalizacije matrica i predstavlja jedan od najznačajnijih doprinosa razvoju ICA algoritama. CCA (Canonical Correlation Analysis) algoritam zasnovan je na statističkoj metodi koju je predložio Harold Hotelling davne 1936. godine. Ovaj algoritam korišćen je u [5] kao ICA metoda za uklanjanje mišićnog artefakta iz signala EEG-a.

Sam razvoj ICA teorije proistekao je iz potrebe da se iz multivarijabilnog signala ekstrakuju *skrivenne* informacije do kojih se nije moglo doći postojećim metodama obrade signala. Istraživači iz raznih oblasti dali su svoj doprinos nastanku ICA teorije. Oni su rešavali probleme u okviru neurofiziologije, neuralnih mreža (*unsupervised learning*), digitalne obrade slike, ekonomije, audio tehnologije i drugih. Zajednička osnova za sve bio je multivarijabilni signal i rešavanje problema koji se definiše kao slepa separacija signala (*blind source separation*). Dati signal (koji je najčešće predstavljao rezultate opservacija) trebalo je dekomponovati na nezavisne komponente. Uproščeno govoreći, na osnovu izlaznog signala jednog MIMO (Multiple Input Multiple Output) sistema, potrebno je estimirati ulazne signale i sam sistem. Pri tome se *a priori* uglavnom ne poseduje bilo kakva informacija o samom sistemu niti o prirodi ulaznih signala, te se stoga i koristi termin slepa separacija (*blind separation*).

Za rešavanje ovakvog problema ne postoji direktan matematički pristup, pa se rešavanje odvija raznovrsnim algoritamskim pristupima.

### 1.3. Pregled dosadašnjih rezultata u obradi EEG signala korišćenjem ICA metoda

Jedna od primena ICA metoda u biomedicini odnosi se na procesiranje EEG signala. Značajna osobina ICA algoritama je da se oni u praksi mogu sasvim uspešno primenjivati čak i kada stvarni modeli odstupaju od idealnih pretpostavki ICA teorije [6]. ICA metoda se uspešno primenjuje na EEG signal iako nije u potpunosti ispunjen uslov da moždane aktivnosti moraju biti statistički strogo nezavisne. Prve rezultate o obradi EEG signala objavio je Bell [8] gde je primenjivao Infomax algoritam. Nakon toga usledili su brojni radovi koji su koristili ICA algoritme za obradu EEG signala. Suština je da se snimljeni EEG signal dekomponuje na nezavisne komponente. Ove nezavisne komponente se dalje pojedinačno procesiraju i na taj način je moguće uklanjati artefakte, detektovati i klasifikovati epileptičke napade i/ili proučavati određene kognitivne radnje.

Uklanjanje mišićnih artefakta iz EEG signala uz pomoć ICA metoda opisano je u [5] gde su uspešni rezultati dobijeni od strane W. Clercq-a. Prikaz filtriranja okularnog-EOG (electro-oculographic) artefakta objavljen je u [12] korišćenjem SOBI algoritma. Olakšavajući faktor za uklanjanje okularnih artefakta je što se može detektovati vremenski interval u kome se oni pojavljuju. Okularni artefakt se javlja u trenutku treptanja i ovi trenuci mogu se jasno uočiti na kanalima Fp1 (Frontal-parietal) i Fp2 (Frontal-parietal). Artefakti koji potiču od srčane aktivnosti ne mogu se filtrirati na ovaj način jer ne postoji referentni signal koji bi nam ukazao u kom trenutku se javlja EKG artefakt značajnog intenziteta. Naime, on je stalno prisutan u EEG signalu, ali je njegov intenzitet veoma nestacionaran. U većini slučajeva on je zanemarljivo mali i nema velikog uticaja na EEG signal. Međutim, postoje trenuci u toku snimanja kada je njegov intenzitet veliki i predstavlja ozbiljnu smetnju za procesiranje EEG signala. U ovim slučajevima je neophodno filtriranje EKG artefakta. U toku samog kliničkog snimanja mi ne znamo ni na kojim elektrodama će se EKG artefakt manifestovati. Ovo u velikoj meri može zavisiti od trenutne blizine elektrode i krvog suda koja se može menjati tokom snimanja usled blagih pomeranja elektroda.

Jedan od prvih pristupa za uklanjanje EKG artefakta predstavlja metoda *ensemble average subtraction* koja je opisana u [10]. U ovom pristupu kreira se referentni signal EKG artefakta usrednjavanjem susednih delova EEG signala. Polazi se od pretpostavke da je EKG artefakt u kraćim intervalima vremena periodičan i korelisan sa srčanim ritmom. Vršiti se usrednjavanje EEG segmenata, koji odgovaraju jednom srčanom ciklusu. Ova metoda pretpostavlja da će se srednja vrednost EEG-a svesti na nulu, a da će preostala vrednost reprezentovati sam EKG artefakt. Ovaj usrednjeni segment signala koristi se kao generativni signal za kreiranje referentnog signala EKG artefakta. Sa ovako kreiranim referentnim signalom pokušao se ukloniti EKG artefakt uz pomoć adaptivne filtracije. Brojni autori testirali su ovu metodu i ona se nije pokazala kao adekvatna [13].

Morfološki filtri su testirani za uklanjanje EKG artefakta od strane Lanquart-a [14]. Ideja u ovom pristupu je bila da se definiše gradivni artefakt nazvan "strukturni element" i da se vidi koliko uspešno on može da se ukloni u zašumljeni signal EEG-a. Ovo bi trebalo da omogućiti detektovanje i izdvajanje EKG artefakta. Pokazalo se da morfološki filtri eliminišu i druge talasne oblike koji zapravo nisu delovi EKG artefakta.

Najzad, neki autori počeli su da istražuju upotrebu ICA teorije za uklanjanje EKG artefakta [10, 15]. Pristup rešavanja ovog problema ICA metodama uglavnom je sličan, ali do sada nisu poznati rezultati koji upućuju koliko su odgovarajući ICA algoritmi efikasni. Poređenje algoritama može se vršiti samo uz pomoć veštački modelovanih artefakata. Inovativni rezultati i metode za poređenje ICA algoritama predstavljeni su u [1]. Ovi radovi

predstavljali su osnovu za dalji rad, tj. da se izvrši kvantifikovanje ICA algoritama koji će se primenjivati u uklanjanju EKG artefakta iz EEG signala. Ovo ujedno predstavlja i temu ovog master rada. Sam master rad uglavnom se zasniva na rezultatima koji su prethodno dobijeni i prezentovani u [9] od strane autora master rada.

## **1.4. Struktura rada**

U ovom radu u glavi 2. definisan je zadatak koji je rešavan u ovom master radu. Navedena je specifična morfologija neonatalnog EEG-a u toku epileptičkog napada i artefakti EEG signala koji otežavaju automatsku detekciju samog napada. Dodatno, date su osnovne informacije o EEG i EKG signala.

U glavi 3. predstavljen je prikaz teorije analize nezavisnih komponenti (Independent Component Analysis – ICA). Sam uvod u ovu teoriju izveden je sa heurističkim pristupom uz ilustrativne primere. Cilj je bio da se prikaže osnovna suština ICA teorije i način na koji ona generalno pristupa rešavanju problema. Dodatno, navedene su određene pretpostavke koje ova teorija nameće kao preduslove da bi se uspešno primenjivala u praksi. U zaključku glave 3. izveden je jedan od najpopularnijih algoritama u ICA teoriji, tzv. FastICA algoritam i prikazani su ilustrativni primeri.

Glava 4. ovog rada posvećena je odabranim ICA algoritmima koji su korišćeni za ekstrakciju EKG artefakta iz EEG signala. Od velikog broja algoritama izabrana su četiri za koje se pretpostavilo da bi bili najuspešniji za rešavanje problema ekstrakcije EKG artefakta iz EEG signala. Ovi algoritmi su veoma zastupljeni prilikom obrade EEG signala i može se reći da predstavljaju standardne ICA algoritme za ovu primenu. Detaljno izvođenje i sama struktura algoritama predstavljena je za RobustICA, SOBI, JADE i CCA algoritme.

Glava 5. posvećena je metodici kojom je dati problem rešavan, dok su u glavi 6. prikazani dobijeni rezultati. Finalna, glava 7. prikazuje zaključake i diskusiju o samom doprinosu rada, kao i o mogućnosti daljih koraka i pravaca istraživanja koji se mogu nadovezati na rezultate ovog rada.

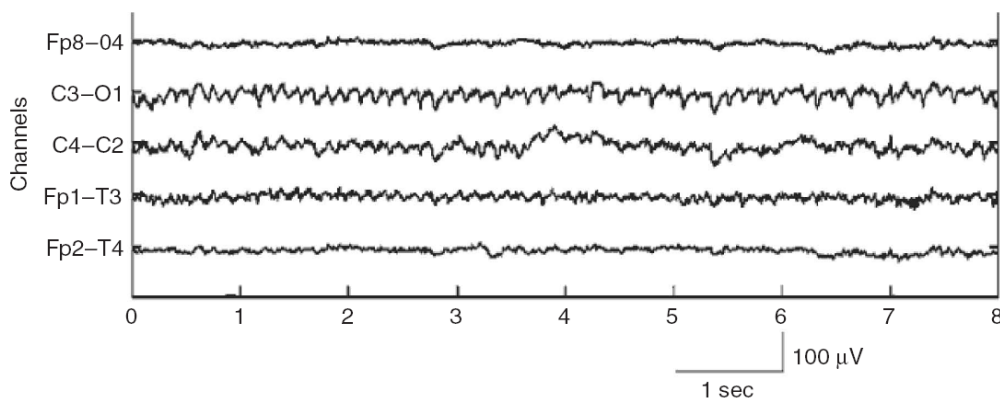


## 2. Zadatak: Detekcija epilepsije kod novorođenčadi

Ovaj rad predstavlja jedan segment projekta koji ima za cilj da se konstruiše automatizovan sistem koji će detektovati epileptičke napade kod novorođenčadi analizom signala elektroencefalograma. Samo snimanje EEG signala najčešće se vrši neprekidno u inkubatorima u dužim intervalima vremena. Epileptički napadi javljaju se kod 0,5% novorođenih beba (prve četiri nedelje života). Ovi napadi predstavljaju ozbiljan indikator abnormalnosti centralnog nervnog sistema (CNS). Postoje mnogi razlozi za ove abnormalnosti, a najčešći uzroci su biohemijski disbalansi u CNS-u, defekti usled nerazvijenosti, specifične infekcije i drugo.

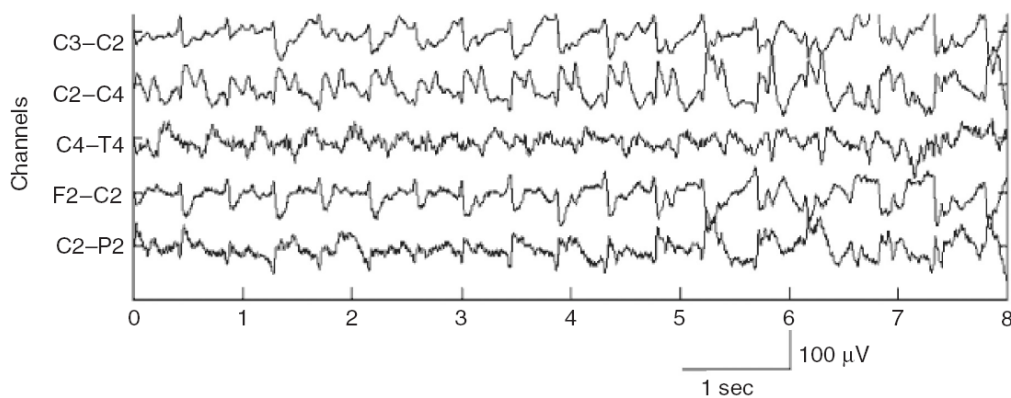
Analiza neonatalnog EEG-a predstavlja veoma komplikovanu oblast u okviru digitalne obrade signala. Klinički znaci epilepsije kod novorođenčadi nisu uvek toliko očigledni kao kod odraslih (koji su praćeni nekontrolisanim, trzajnim pokretima tela koji se učestalo ponavljaju). Naime, kod novorođenčadi su prisutni manje očigledni simptomi, tzv. blagi napadi (*subtle seizures*). Oni se mogu manifestovati neprekidno otvorenim očima sa okularnom fiksacijom, učestalim treptanjem, gutanjem, blažim pokretima tela ili facijalnim ekspresijama. Usled ovih simptoma, detekcija epileptičkih napada kod novorođenčadi je daleko kompleksnija i do sada postoji svega nekoliko razvijenih pristupa sa kojima se pokušao rešiti ovaj problem. Svi ovi pristupi imaju veoma visok procenat lažnih detekcija, pa se stalno radi na pronalaženju novih i sofisticiranih algoritama.

U toku epileptičkog napada kod novorođenčeta se ne manifestuje specifična vremensko-frekvencijska karakteristika kojom bi se mogao opisati EEG signal u toku napada, kao što je to slučaj kod odraslih osoba. Najčešće, u EEG signalima su prisutni pikovi usled nerazvijenih mentalnih aktivnosti i brzih promena u metabolizmu mozga. U novijim istraživanjima i pristupima [6] pojava epilepsije kod novorođenčadi opisuje se pomoću tri kategorije morfoloških oblika EEG signala: a) pseudosinusoidalnih, b) kompleksna morfologija i c) ritmičke pojave pikova-nalik talasima. Ove tri kategorije signala predstavljene su na slikama 2.1, 2.2 i 2.3 retrospektivno.



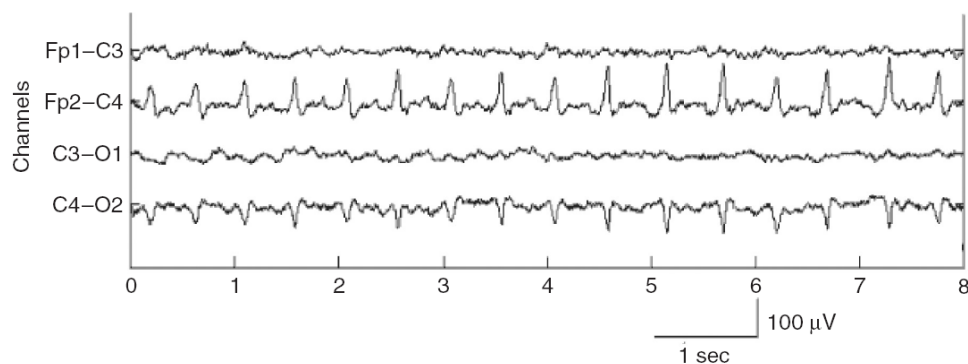
(a)

Slika 2.1. Niskoamplitudni tip “*depressed brain discharge*” na kanalima C3-O1 i Fp1-T3. Preuzeto iz [6]



(b)

Slika 2.2. Učestali kompleks sporih talasa sa utisnutim visokim frekvencijama na svim kanalima. Preuzeto iz [6]



(c)

Slika 2.3. Periodični brzi prelazi-pikovi na kanalima **FP2-C4** i **C4-O2**. Preuzeto iz [6]

Dakle, veoma je važno da se prilikom projektovanja sistema za detekciju smanji mogućnost lažne detekcije, a još važniji zahtev je da se ne dogodi eventualno propuštanje detekcije samog epileptičkog napada. Stoga se zastupljenost sva tri morfološka oblika u EEG signalu mora precizno proveriti. Važno je istaći da što se ranije otkrije epileptički napad kod novorođenčadi, može se odmah pristupiti medikalnoj terapiji. Na taj način se dalja oštećenja centralnog nervnog sistema mogu usporiti i/ili zaustaviti.

Iako postoji širok frekventijski spektar u kojem su zastupljeni signali u toku epileptičkog napada novorođenčeta oni se najčešće nalaze u opsegu delta i teta talasa (1–7Hz). Pre nego što se EEG signal dovede do algoritma za otkrivanje epileptičkih napada vrši se njegovo pretprocesiranje. Glavni artefakti koji su utisnuti u signal EEG-a potiču od treptaja oka, pokreta tela i aktivnosti srčanog mišića (EKG). Ovi artefakti uklanjaju se najčešće primenom *Independent Component Analysis* teorije.

Ovaj rad ima za cilj da se kod novorođenčadi iz signala encefalograma (EEG) ukloni šum koji potiče od električne aktivnosti srčanog mišića (EKG) koristeći se pri tome najefikasnijim ICA algoritmima. EKG artefakt je veoma važno uspešno ukloniti jer su njegove morfološke karakteristike veoma slične sa karakteristikama EEG signala koji se javljaju u toku epileptičkog napada (ponavljanje sinusoidalnih signala i pikova). Na ovaj način smanjuje se broj lažnih detekcija koje algoritam može detektovati. Glavna metoda obrade signala koja se koristi pri ovome je analiza nezavisnih komponentata (*Independent Component Analysis*). U

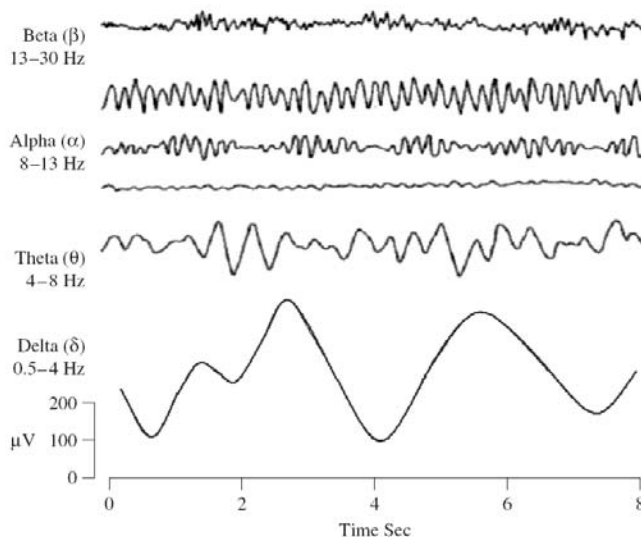
ovom radu u računarskim simulacijama analizirani su EEG i EKG signali. Korišćeni su signali dobijeni standardnim kliničkim snimanjem na novorođenim bebama.

## 2.1. Elektroencefalogram (EEG)

Elektroencefalogram (EEG) predstavlja električnu aktivnost kore velikog mozga. Kada se moždane ćelije (neuroni) aktiviraju stvara se električna struja u nervnim završecima–dendritima. Ova struja generiše magnetno polje i sekundarno električno polje. Kako se uobičajeno aktivira veliki broj neurona, oni mogu prouzrokovati dovoljno veliku razliku potencijala koja se može meriti na glavi čoveka površinskim elektrodama. Intenzitet mernih signala je u opsegu od nekoliko mikrovolta, pa do nekoliko minivolta. Učestanost električne aktivnosti kreće se u opsegu od 0.5Hz do oko 50Hz i veoma zavisi od kortikalne aktivnosti.

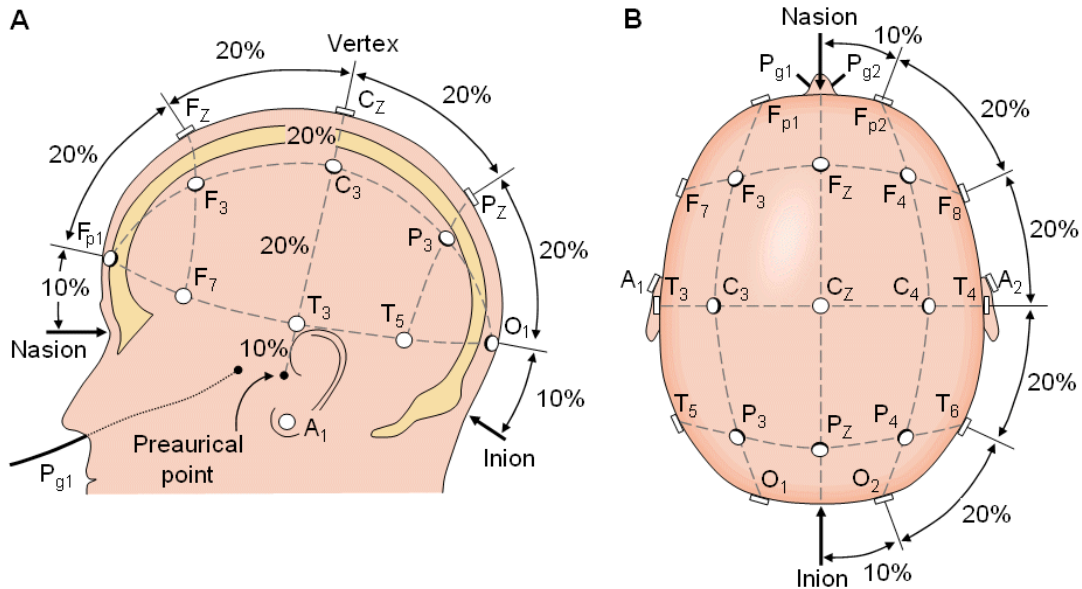
Započinjanje pokreta, svesno opažanje senzacija, emocije i ponašanje su samo neke od aktivnosti koje se manifestuju u kori velikog mozga i mogu se detektovati u EEG signalu. U toku snimanja, električna aktivnost se stalno menja i nestacionarna je, pa se ne može govoriti o nekom karakterističnom pravilnom signalu. Međutim, određene pravilnosti se mogu ustanoviti u aktivnostima kore velikog mozga prilikom različitih nadražaja ili u pasivnim stanjima, te se na osnovu ovoga mogu dijagnosticirati neki neurološki problemi (epilepsija, mentalni poremećaji i sl.).

U normalnom EEG signalu definišu se Alfa, Beta, Teta i Delta talasi. Ovi talasi odgovaraju određenim frekvencijskim intervalima i vezani su za specifične aktivnosti. Na slici 2.4 su predstavljeni primeri ovih talasa i opsezi njihovih učestanosti.



Slika 2.4. Četiri tipična dominantna moždana signala. Preuzeto iz [6]

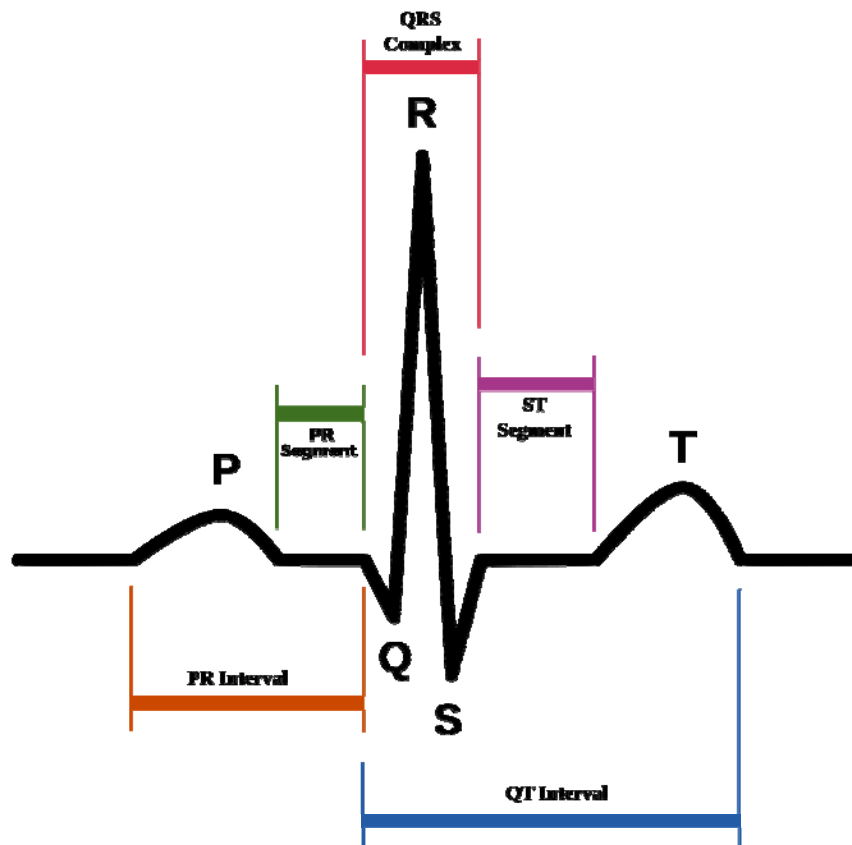
U cilju standardizacije snimanja signala elektroencefalograma elektrode se postavljaju na karakteristične pozicije glave. U kliničkoj praksi najčešće se koristi sistem 10–20 koji definiše položaj elektroda (slika 2.5). Sam naziv 10–20 izveden je iz pristupa koji vrši podelu glave na regije u odgovarajućoj procentualnoj razmeri. Presečne tačke linija koje vrše podelu, predstavljaju pozicije na koje se postavljaju elektrode kao što je prikazano na slici 2.5.



Slika 2.5. Konvencionalni sistem 10–20 koji određuje položaje elektroda. A–pogled sa leve strane glave. B–pogled odozgo. Preuzeto iz [6]

## 2.2. Elektrokardiogram (EKG)

Elektrokardiogram–EKG predstavlja električnu manifestaciju kontraktivnih aktivnosti srca i može se veoma lako snimati površinskim elektrodama na ekstremitetima i grudima. EKG je sigurno jedan od najzastupljenijih i najprepoznatljivijih biomedicinskih signala. Jednostavnim brojanjem karakterističnih talasa EKG signala može se utvrditi brzina otkucaja srca, ali naravno dijagnostikovanjem karakterističnih talasnih oblika mogu se otkriti mnoge kardiovaskularne bolesti i abnormalnosti.



Slika 2.6. Standardni oblik EKG signala. Preuzeto iz [18]

Osnovna ideja u merenju EKG signala predstavlja zapravo merenje akcionog potencijala srca. Pojednostavljeno, električna aktivnost srca može se modelovati u obliku električnog dipola. Desna pretkomora srca ima snop nerava koji je poznat kao sinusatrijalni čvor (*SA node*). Ovakav skup ćelija je specifičan i postoji samo na ovom mestu u ljudskom organizmu. Njegova funkcija je da inicira srčanu kontrakciju i odredi ritam rada srca (puls). Impuls koji se generiše na SA čvoru izaziva kontrakciju pretkomora i prenosi se do atrik–ventrikularnog čvora (*AV node*). Stimulacija AV čvora stvara impulse na miokardu, tj. ventrikuli kroz Hisov snop i Purkinjeov sistem. Ovo nam ukazuje da depolarizacija i repolarizacija SA i AV čvora imaju poseban značaj u radu srca. Ovi akcioni potencijali mogu se registrovati na površini tela i oni zapravo predstavljaju elektrokardiogram. EKG signal je složenoperiodičan i na njemu se mogu registrovati talasi koji opisuju aktivnost srca. Modelovanjem preko električnog dipola u

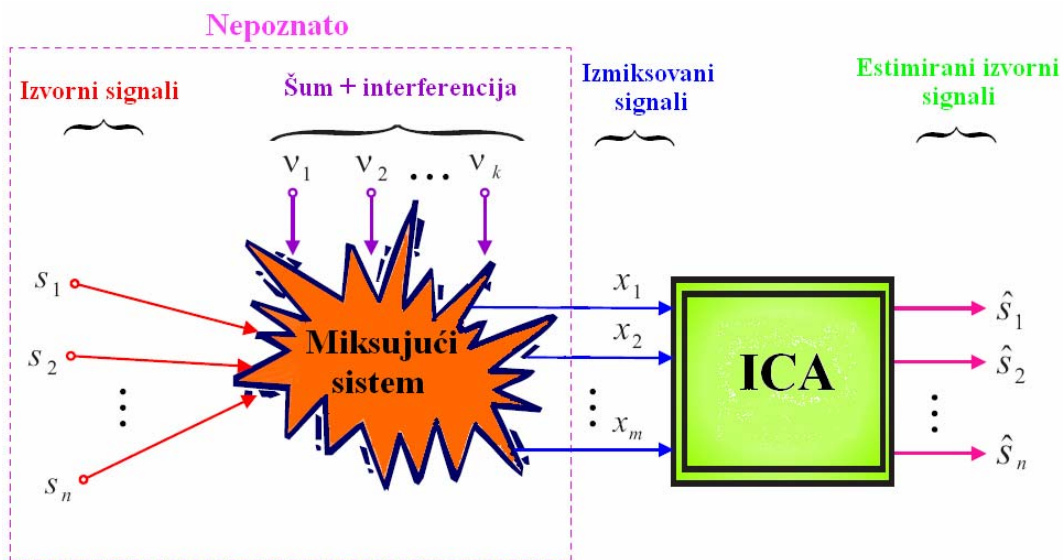
delimično provodnoj ravni, električna aktivnost srca može se kvantifikovati kao vektorska veličina. Na taj način merenjem električne aktivnosti srca na površini tela mi možemo pratiti pravilnost rada srca. Elektrode se postavljaju na površini tela i omogućuju da se proceni položaj dipola i vremenska promena električnog polja dipola.

U kliničkoj praksi se koristi standardni 12-kanalni EKG koji se dobija postavljanjem elektroda na četiri ekstremiteta i na grudi. Šematski prikaz EKG signala sastoji se od srčanih ciklusa koji se opisuju karakterističnim talasima i segmentima (slika 2.6). Svaki od ovih oblika povezuje se sa određenom srčanom aktivnošću. Jedan od najizraženijih oblika u EKG signalu predstavlja QRS kompleks. On nastaje usled depolarizacije AV čvora i ventrikularne kontrakcije. Za praćenje srčane aktivnosti i uticaj EKG artefakta na EEG signal u ovom radu korišćen je algoritam koji detektuje maksimum R talasa. Ovaj deo EKG signala je svakako najlakši za detektovanje i korišćen je za ispitivanje korelisanosti EKG artefakta u signalu elektroencefalograma i samog EKG signala.

### 3. Analiza nezavisnih komponenti *Independent Component Analysis (ICA)*

Analiza nezavisnih komponenta (*Independent Component Analysis*–ICA) predstavlja jednu od metoda digitalne obrade signala za identifikaciju nepoznatog miksjućeg sistema i izvornih signala. ICA se koristi za rešavanje *Blind Source Separation* (BSS) problema, gde se termin *blind* (slepa) koristi jer se ne zahteva nikakvo prvobitno znanje o samom miksjućem procesu i izvornim signalima. Jedina pretpostavka na kojoj se zasniva ICA teorija je da su originalni izvorni signali koji se estimiraju međusobno statistički nezavisni i da nemaju gausovsku raspodelu. Zbog ovih preduslova, ICA se definiše kao metod ili alat za rešavanje generalnog *Blind Source Separation* (BSS) problema.

Estimacija miksjućeg modela i izvornih signala vrši se samo na osnovu izmiksovanih signala, a oni najčešće predstavljaju observirane signale sa senzora na izlazu sistema. Sama estimacija ne pronalazi jedinstvena rešenja problema, već procene rešenja sa odgovarajućim neodređenostima. Ove neodređenosti u većini slučajeva ne predstavljaju ograničenja za efikasnu primenu ICA metode u praksi. Rešavanje problema slepe identifikacije ICA metodom ilustrativno je predstavljeno na slici 3.1.



Slika 3.1. Blok dijagram kojim je predstavljena osnova problema za rešavanje ICA metodom

ICA metoda koristi se za analizu i separaciju negausovskih miksovanih signala. Postavka ICA teorije zasniva se na *Principal Component Analysis* (PCA) metodi. PCA metoda može se primenjivati i na gausovske signale i ona de Koreliše statistiku signala drugog reda (npr. kovarijacionu matricu). Veoma često predstavlja predprocesirajući korak prilikom rešavanja problema primenom ICA metode. Nasuprot PCA metodi, ICA metoda radi sa negausovskim signalima i pored statistike drugog reda, ona de Koreliše i statistiku signala višeg reda (najčešće četvrtog, npr. *kurtosis*). Kako se ICA metoda primenjuje na negausovske signale, rešavanje problema zahteva optimizaciju kriterijumske funkcije koja je nelinearna.

### 3.1. Postavka *Independent Component Analysis* problema

Da bismo precizno definisali *Independent Component Analysis* problem upotrebićemo statistički model sa *latentnim promenljivima*. Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_n$  miksujući signali koji su observirani uz pomoć  $n$  senzora (slika 3.1). Pretpostavimo da su oni nastali linearnom kombinacijom (miksovanjem)  $n$  izvornih signala  $s_i$  u toku nekog procesa. Ovaj proces može se modelovati kao linearna kombinacija  $n$  slučajnih promenljivih  $s_1, s_2, \dots, s_n$  u sledećem obliku:

$$x_i = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{in}s_n, \quad \forall i \in [1, n] \quad (3.1)$$

gde su  $a_{ij}$  miksujući realni koeficijenti za koje se pretpostavlja da su nepoznati, a slučajne promenljive  $s_j$  su ulazi u sistem i statistički su uzajamno nezavisne. Ovo predstavlja osnovni ICA generativni model koji opisuje kako se observabilne promenljive  $x_i$  kreiraju na osnovu izvornih komponenata  $s_j$ . Nezavisne komponente  $s_j$  su latentne promenljive što znači da se one ne mogu direktno odrediti, odnosno da se ne mogu izmeriti. Koristeći ICA model i poznavajući samo miksovane promenljive  $x_i$ , potrebno je estimirati i miksujuće koeficijente  $a_{ij}$  i nezavisne komponente  $s_j$ . U osnovnom ICA modelu zanemaruje se prisustvo šuma i eventualna kašnjenja izvornih signala koja se mogu javiti u procesu miksovanja.

U praksi, umesto sistema jednačina često je podesnije koristiti vektorsko–matričnu notaciju, te sistem (3.1) možemo predstaviti u sledećoj matričnoj formi:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (3.2)$$

Matrica  $\mathbf{A}$  često se naziva miksjuća ili observaciona matrica. Za nju se uvek pretpostavlja da je nepoznata i cilj ICA teorije je estimacija njene inverzne matrice.

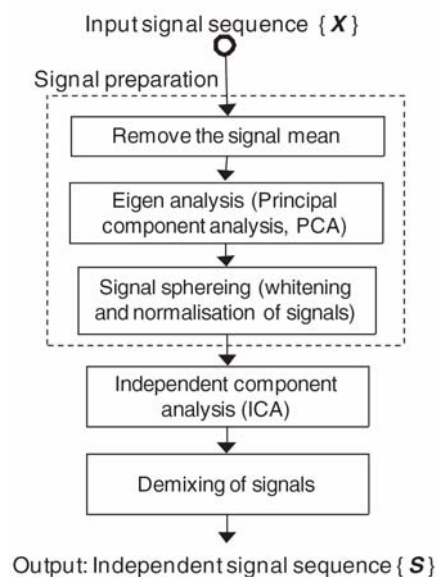
U mnogim praktičnim slučajevima mi posedujemo sekvence opservacija vektora  $\mathbf{x}$ :  $[\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(K)]$ . Miskujuća matrica  $\mathbf{A}$  je nepoznata i mi želimo da estimiramo demiksujuću (inverznu) matricu  $\mathbf{W}$ , na osnovu koje bismo procenili sekvencu originalnih izvornih komponenata  $[s(0), s(1), \dots, s(K)]$ . Estimacija izvornih, nezavisnih komponenata  $\hat{\mathbf{s}}(k)$  zasniva se na prvobitnoj proceni matrice  $\mathbf{W}$  tako da je ispunjeno:

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}(k), \quad k \in [0, K] \quad (3.3)$$

gde bi u idealnom slučaju bilo ispunjeno  $\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}$ . U slučajevima kada matrica  $\mathbf{A}$  nije kvadratna, umesto standardne inverzije izračunava se pseudo–inverzna matrica  $\mathbf{W}$ .

Procena matrice  $\mathbf{W}$  zasniva se na pretpostavci da su izvorne komponente međusobno statistički nezavisne. Svojstvo nezavisnosti signala može se kvantifikovati na više načina. Jedan od pristupa je korišćenje teorije informacija koja koristi meru uzajamnih informacija signala i karakteriše nezavisnost uz pomoć maksimalne entropije. Druge metode koriste parametre za kvantifikovanje nezavisnosti kao što su mera “negausijanstva“ (*non-Gaussianity*), mera maksimalne verovatnoće (*maximum likelihood*) ili mera koja se izračunava upotrebom dijagonalnih kumulativnih matrica. S obzirom na algoritme koji su korišćeni u simulacijama u ovom radu (FastICA, odnosno RobustICA), pristup ICA teoriji biće izveden preko negausijanstva gde se upotrebom kurtozisa kvantifikuje mera nezavisnosti signala [4]. Osnovne etape primene ICA teorije na miksovane signale  $\mathbf{x}$  i proces separacije prikazani su na slici 3.2. Svi ovi koraci su detaljno objašnjeni u nastavku ove glave.





Slika 3.2. Ilustracija osnovnih etapa kod primene ICA metode. Preuzeto iz [16]

### 3.2. Pretpostavke i ograničenja u ICA teoriji

Da bi osnovni ICA model bio svrsishodan, potrebno je uvesti odgovarajuće pretpostavke koje moraju biti zadovoljene. Dodatno, ICA teorija poseduje i neodređenosti i ograničenja koje nije moguće rešiti i prevazići.

1. Osnovna pretpostavka na kojoj je zasnovan ICA metod je da su nezavisne komponente  $s_i$  statistički *nezavisne*. Za proizvoljne slučajne promenljive  $y_1, y_2, \dots, y_n$  kažemo da su statistički nezavisne ukoliko na osnovu informacije o vrednosti jedne slučajne promenljive  $y_i$  ne možemo dobiti nikakve nove informacije o vrednostima ostalih slučajnih promenljivih  $y_j$  gde važi da je  $i \neq j$ . Ova osobina može se matematički izraziti preko gustine verovatnoće  $p$ , odnosno pojma zajedničke gustine verovatnoće slučajnih promenljivih. Kažemo da su slučajne promenljive nezavisne ako i samo ako se zajednička gustina verovatnoće može faktorizovati na sledeći način:

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n) = p(y_1) \cdot p(y_2) \cdot \dots \cdot p(y_n) \quad (3.4)$$

2. U ICA modelima izvorne komponente moraju imati *negausovsku* raspodelu. Intuitivno, može se reći da je gausovska raspodela "isuviše jednostavna" jer su njeni kumulanti višeg reda jednaki nuli. ICA metoda upravo koristi statističke informacije višeg reda, pa je estimacija promenljivih koje imaju gausovsku raspodelu nemoguća. Ovde je bitno istaći da mi ne poznajemo *a priori* kakva je statistika nezavisnih komponenata. Ukoliko bismo posedovali takve informacije problem estimacije bi se značajno pojednostavio i mogle bi se koristiti druge jednostavnije tehnike. Za primenu ICA teorije samo je bitno da izvorne, nezavisne komponente nisu raspodeljene prema gausovskoj raspodeli.

3. Primenom ICA metoda ne možemo odrediti egzaktnu vrednost varijansi (energiju) izvornih komponenti  $s$ . Razlog za to je u činjenici da su i izvorni signali  $s$  i miksujuća matrica  $\mathbf{A}$  nepoznati. Ovo se može lako pokazati ukoliko pretpostavimo da je u našem ICA modelu varijansa jedne nezavisne komponente  $s_i$  striktno određena. Ovu nezavisnu komponentu mi možemo pomnožiti proizvoljnim skalarom  $\alpha_i$  i na taj način dobiti novu vrednost njene varijanse – odnosno neko novo rešenje. Da je ovo novo rešenje takođe ravnopravno možemo pokazati ukoliko odgovarajuće vektor kolone  $\mathbf{a}_i$  matrice  $\mathbf{A}$  podelimo upravo sa tim istim skalarom. Matematički ovo možemo napisati u sledećem obliku:

$$\mathbf{x} = \sum_i \left( \frac{1}{\alpha_i} \cdot \mathbf{a}_i \right) (s_i \cdot \alpha_i) \quad (3.5)$$

Kao posledicu ovoga mi možemo podesiti amplitude odgovarajućih nezavisnih komponenata  $s_i$ . Kako su one slučajne promenljive, najprirodnije je da se za svaku od njih pretpostavi da ima jediničnu varijansu:  $E\{s_i^2\} = 1$ . U raznim ICA algoritmima matrica  $\mathbf{A}$  se onda podešava kako bi se prilagodila ovom uslovu. Primetimo da nam ovo još uvek ostavlja *nepoznavanje znaka* nezavisne komponente. Mi nezavisnu komponentu možemo pomnožiti sa -1 bez ikakvog uticaja na model. Ova neodređenost je uglavnom neznačajna u većini praktičnih primena.

Takođe, u ICA modelima pretpostavljamo da je očekivana srednja vrednost i nezavisnih komponenti  $s_i$  i miksovanih komponenti  $x_i$  jednaka nuli. Ova pretpostavka pojednostavljuje teoriju i same ICA algoritme bez gubitka opštosti.

4. Ne postoji mogućnost da se odredi tačan poredak nezavisnih komponenti  $s_i$  u ICA modelu. Razlog za ovo je ponovo u činjenici da su i  $s$  i  $\mathbf{A}$  nepoznati. Ukoliko uvedemo permutujuću matricu  $\mathbf{P}$ , i njenu inverznu matricu  $\mathbf{P}^{-1}$ , možemo proširivanjem jednačine (3.2) dobiti  $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{s}$ . Na ovaj način, koristeći matricu  $\mathbf{P}$ , možemo na proizvoljan način menjati poredak nezavisnih komponenti. Rešenja našeg ICA modela u ovom slučaju biće  $\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$  za miksujuću matricu i  $\mathbf{P}\mathbf{s}$  za nezavisne komponente.

5. Da bi se separacija signala uspešno izvršila potrebno je da je broj miksujućih signala (odnosno broj senzora) veći ili jednak broju nezavisnih komponenti. Ukoliko ovaj uslov nije ispunjen miksujuća matrica  $\mathbf{A}$  neće biti punog ranga i pronalaženje njene inverzne matrice biće nemoguće.

6. Veoma često u rešavanju BSS problema mi ne poznajemo broj izvornih, nezavisnih komponenti  $s_i$ . Ovo predstavlja otežavajuću okolnost jer ne možemo unapred odrediti broj senzora sa kojima bismo vršili akviziciju podataka. U primenama ICA metode pri procesiranju EEG signala uglavnom se koristi standardni 20 kanalni signal. Pokazano je [4] da je ovaj broj kanala u većini slučajeva dovoljan za uspešnu primenu ICA algoritama.

### 3.3. Beljenje kao preprocesirajući korak u ICA teoriji

Definisali smo glavnu pretpostavku za primenu ICA metoda koja kaže da izvorne komponente moraju biti međusobno nezavisne. *Nekorelisnost* slučajnih promenljivih predstavlja “blažu” formu od nezavisnosti. Za dve slučajne promenljive  $q_1$  i  $q_2$  kažemo da su nekorelisane ukoliko je njihova kovarijansa jednaka nuli:

$$\text{cov}(q_1, q_2) = E\{q_1 \cdot q_2\} - E\{q_1\} \cdot E\{q_2\} \quad (3.6)$$

Kako je u ICA metodama usvojena pretpostavka da su očekivane srednje vrednosti slučajnih promenljivih nule i korelacija dve slučajne promenljive biće jednaka nuli ako su ove promenljive nekorelisane.

Ukoliko su slučajne promenljive nezavisne one su tada i nekorelisane. U suprotnom slučaju, ukoliko znamo da su slučajne promenljive nekorelisane ta činjenica ne implicira da su one istovremeno i nezavisne. Nešto “snažnija” osobina od nekorelisnosti je *izbeljenost* (*whitening*). Izbeljeni slučajni vektor sa očekivanom srednjom vrednošću nula, recimo  $\mathbf{Q}$ , ima međusobno nekorelisane komponente, a njihove varijanse su jednake jedinici. Drugim rečima, kovarijaciona matrica (a isto tako i korelaciona matrica) vektora  $\mathbf{Q}$  je jednaka jediničnoj matrici:

$$\text{cov}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T) = E\{\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\} = \mathbf{I} \quad (3.7)$$

Sam postupak beljenja vektora podataka  $\mathbf{x}$  je linearna transformacija koja podrazumeva da se vektor  $\mathbf{x}$  linearno pomnoži sa nekom matricom  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x} \quad (3.8)$$

tako da se kao rezultat dobije novi vektor  $\mathbf{z}$  koji je *beo*. Proces *beljenja* je uvek moguće izvršiti, a jedna od najpopularnijih metoda predstavlja primenu *rastavljanja na sopstvene vrednosti* (eigenvalue decomposition–EVD) kovarijacione matrice:

$$E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} = \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T \quad (3.9)$$

gde  $\mathbf{E}$  predstavlja ortogonalnu matricu sopstvenih vektora  $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$  i gde  $\mathbf{D}$  predstavlja dijagonalnu matricu sopstvenih vrednosti,  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Na osnovu [4], beljenje se sada može izvršiti uz pomoć matrice:

$$\mathbf{V} = \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T \quad (3.10)$$

Da bismo odredili vezu beljenja i ICA metode, pretpostavimo da je miksujući signal  $\mathbf{x}$  ICA modela izbeljen upravo matricom  $\mathbf{V}$ . Na taj način dobijamo novu miksujuću matricu modela:

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{s} \quad (3.11)$$

Optimistično, mogli bismo zaključiti da beljenje rešava ICA problem s obzirom da je beljenje i nekorelisanost povezano sa nezavisnošću, ali to ipak nije slučaj. Nekorelisanost je slabiji zahtev od nezavisnosti, te stoga ono samo nije dovoljno za estimaciju ICA modela. Da bismo ovo potvrdili, posmatrajmo *ortogonalnu* transformaciju vektora  $\mathbf{z}$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{z} \quad (3.12)$$

Usled ortogonalnosti  $\mathbf{U}$ , imamo:

$$E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} = E\{\mathbf{U}\mathbf{z}\mathbf{z}^T\mathbf{U}^T\} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I} \quad (3.13)$$

Drugim rečima, vektor  $\mathbf{y}$  je takođe beo tako da mi ne možemo zaključiti da li su nezavisne komponente ICA modela predstavljene vektorom  $\mathbf{z}$  ili  $\mathbf{y}$  oslanjajući se samo na osobinu beljenja. Kako  $\mathbf{y}$  može biti bilo koja ortogonalna transformacija od  $\mathbf{z}$ , beljenjem dobijamo komponente koje su međusobno nekorelisane, ali ne i nezavisne. Za većinu primena ovo nije dovoljno za estimaciju samog modela i izvornih komponenti.

Međutim, beljenje je koristan predprocesirajući korak kod ICA metoda. Rezultat beljenja ogleda se u činjenici da je *nova matrica miksovanja*  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}\mathbf{A}$  *ortogonalna*. Ovo znači da mi možemo ograničiti traženje našeg rešenja u prostoru ortogonalnih matrica. Stoga umesto da se procenjuje  $n^2$  elemenata originalne matrice  $\mathbf{A}$ , možemo estimirati samo polovinu ovih elemenata jer ortogonalna matrica sadrži  $n(n-1)/2$  stepeni slobode. Često se kaže da beljenje *rešava polovinu problema* kod ICA metoda. Kako je beljenje veoma jednostavna i standardna procedura, mnogo jednostavnija nego bilo koji ICA algoritam, uvek je dobra ideja da se na ovaj način kompleksnost problema prepolovi.

### 3.4. Gausovski raspodeljene slučajne promenljive i ICA

Proces beljenja može nam pomoći da utvrdimo zašto su gausovske promenljive *zabranjene* u ICA modelima. Pretpostavimo da je zajednička raspodela za dve slučajne promenljive (nezavisne komponente)  $s_1$  i  $s_2$  gausovska. Ovo znači da je njihova zajednička gustina verovatnoće data sa:

$$p_s(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{2}\right) \quad (3.14)$$

Dalje možemo pretpostaviti da je matrica miksovanja  $\mathbf{A}$  *ortogonalna* ( $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ ) što ne predstavlja umanjene opštosti jer se ortogonalnost lako postiže u pretprocesirajućem koraku beljenja. Koristeći standardnu formulu za transformaciju funkcije gustine verovatnoće [4] i relaciju (3.2) dobijamo zajedničku gustinu raspodela za izmerene signale  $x_1$  i  $x_2$  koje su date sledećom formulom:

$$p(x_1, x_2) = p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} p_s(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{x}\|^2}{2}\right) \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \quad (3.15)$$

Usled ortogonalnosti matrice  $\mathbf{A}$ , imamo da je  $\|\mathbf{A}^T \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$  i da je  $\det|\mathbf{A}|=1$ , pa na taj način imamo da je:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}\right) \quad (3.16)$$

odakle se vidi da matrica miksovanja  $\mathbf{A}$  ne menja funkciju gustine verovatnoće izvornih signala  $s$ . Originalne i izmiksovane raspodele su identične, te stoga ne postoji način da na osnovu izmiksovanih podataka  $x_1$  i  $x_2$  dobijemo bilo kakvu informaciju o matrici miksovanja  $\mathbf{A}$ . Ortogonalna matrica miksovanja ne može se estimirati na osnovu gausovskih promenljivih zbog toga što su nekorelisane gausovske promenljive istovremeno i nezavisne. Stoga informacija o nezavisnosti komponenata ne vodi nas dalje od procesa beljenja.

Važno je napomenuti da kada u skupu nezavisnih komponenata  $s_i$  postoji *samo jedna* gausovski raspodeljena komponenta, ICA model se tada može estimirati. Ova komponenta se tada neće izmiksovati sa raspodelama ostalih nezavisnih komponenti i one će biti estimirane svojim verodostojnim raspodelama. U praktičnim primenama ovo je veoma korisno jer možemo koristiti najjednostavniji ICA model, bez potrebe da se u sam model uvode signali šuma (koji se najčešće modeluju gausovskim belim šumom).

### 3.5. Povezanost gausovske raspodele i nezavisnosti

Centralna granična teorema [4] predstavlja rezultat klasične teorije verovatnoće i ona kaže da *suma nezavisnih slučajnih promenljivih teži gausovskoj raspodeli pod odgovarajućim uslovima*. Gledano uprošćeno, suma dve nezavisne slučajne promenljive najčešće ima raspodelu koja je bliža gausovskoj nego bila koja od ove dve slučajne promenljive pojedinačno.

Predpostavimo da je vektor  $\mathbf{x}$  mešavina nezavisnih komponenata i da je predstavljen prema osnovnom ICA modelu jednačinom (3.2). Možemo pretpostaviti da sve nezavisne komponente  $s_i$  imaju identičnu raspodelu, radi jednostavnije interpretacije. Estimacije nezavisnih komponenti mogu se uz pomoć jednačine (3.3) tražiti kao linearna kombinacija vektora podataka  $\mathbf{x}$ . Ukoliko želimo da estimiramo *samo jednu* nezavisnu komponentu  $y$  ( $y$  je estimacija neke od izvornih komponenata  $s_i$ ) ona se može predstaviti kao linearna kombinacija vektora  $x_i$ :

$$y = \mathbf{b}^T \mathbf{x} = \sum_i b_i x_i = \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{s} \quad (3.17)$$

Vektor  $\mathbf{b}$  je vektor koji je potrebno odrediti, a vidimo da  $y$  predstavlja i linearnu kombinaciju nezavisnih komponenata  $s_i$  sa koeficijentima datim kao  $\mathbf{b}^T \mathbf{A}$ . Obeležimo ove koeficijente sa  $\mathbf{q}$ , tako da imamo:

$$y = \mathbf{b}^T \mathbf{x} = \mathbf{q}^T \mathbf{s} = \sum_i q_i s_i \quad (3.18)$$

Ukoliko bi  $\mathbf{b}$  predstavljao jedan red inverzne matrice  $\mathbf{A}$ , tada bi član  $\mathbf{b}^T \mathbf{x}$  bio ustvari jednak jednoj od izvornih nezavisnih komponenata  $s_i$ . U tom slučaju, odgovarajući vektor  $\mathbf{q}$  bio bi takav da bi samo jedan njegov element bio jednak jedinici, a svi ostali bi bile nule.

Postavlja se pitanje: Kako možemo primeniti *centralnu graničnu teoremu* da bismo odredili  $\mathbf{b}$  tako da ono bude jednako jednom redu inverzne matrice  $\mathbf{A}$ ? U praksi mi ne možemo odrediti  $\mathbf{b}$  zato što ne posedujemo znanja o matrici  $\mathbf{A}$ , ali možemo pronaći estimator koji će dati dovoljno dobru aproksimaciju. Tako, možemo izabrati vektor  $\mathbf{b}$  da on maksimizuje negausijanstvo  $\mathbf{b}^T \mathbf{x}$ . Takav vektor bi neophodno odgovarao vektoru  $\mathbf{q}$ , koji ima samo jedan nenulti elemenat. Ovo bi značilo da je  $y = \mathbf{b}^T \mathbf{x} = \mathbf{q}^T \mathbf{s}$  zapravo jedna od nezavisnih izvornih komponenata  $s_i$ !

### 3.6. Merenje negausijanstva uz pomoć kurtozisa

Da bismo koristili osobine *negausijanstva* u ICA metodama, mi moramo imati kvantitativnu meru negausijanstva slučajne promenljive  $y$ . Jedan od načina da se opiše mera negausijanstva je korišćenjem *kurtozisa* [4]. Kurtozis predstavlja kumulant četvrtog reda slučajne promenljive i definisan je kao:

$$kurt(y) = E\{y^4\} - 3(E\{y^2\})^2 \quad (3.19)$$

Ova pojednostavljena definicija kurtozisa se odnosi za naš slučaj u kome smo pretpostavili da je očekivana srednja vrednost slučajnih promenljivih nula, a dalje još možemo pretpostaviti i da je varijansa  $E\{y^2\} = 1$  bez umanjavanja opštosti. Za gausovski raspodeljene slučajne promenljive četvrti moment je jednak  $E\{y^4\} = 3(E\{y^2\})^2$ , te je stoga kurtozis gausovskih promenljivih jednak nuli. Za negausovske slučajne promenljive (osim za neke veoma retke) kurtozis ima nenultu vrednost. Kurtozis slučajnih promenljivih može biti i pozitivan i negativan, te se stoga najčešće koristi apsolutna vrednost kurtozisa kao mera negausijanstva. Glavni razlog za primenu kurtozisa je njegova jednostavnost, kako teorijska tako i računska. Računski, kurtozis se procenjuje jednostavnim korišćenjem četvrtog momenta, a teorijska jednostavnost ogleda se u činjenici da kurtozis ima linearna svojstva za dve nezavisno slučajne promenljive  $y_1$  i  $y_2$ :

$$kurt(y_1 + y_2) = kurt(y_1) + kurt(y_2) \quad (3.20)$$

$$kurt(\alpha y_1) = \alpha^4 kurt(y_1) \quad (3.21)$$

gde  $\alpha$  predstavlja konstantu.

### –Prikaz optimizacije kod ICA

Da bismo prikazali kako se u praksi upotrebljava kurtozis i kako se nezavisne komponente mogu pronaći maksimizacijom kurtozisa posmatrajmo jednostavan dvodimenzionalni model:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (3.22)$$

Pretpostavimo da nezavisne komponente  $s_1$  i  $s_2$ , obe imaju vrednosti kurtozisa  $kurt(s_1)$  i  $kurt(s_2)$  različite od nule i podsetimo se da su varijanse komponentata po pretpostavci jedinične. Naš cilj je da pronađemo jednu od nezavisnih komponenti definisanu kao  $y = \mathbf{b}^T \mathbf{x}$ . Ukoliko ponovo uvedemo vektor  $\mathbf{q}$  imaćemo:

$$y = \mathbf{b}^T \mathbf{x} = \mathbf{q}^T \mathbf{s} = q_1 s_1 + q_2 s_2 \quad (3.23)$$

Sada na osnovu aditivnog svojstva kurtozisa imamo:

$$kurt(y) = kurt(q_1 s_1) + kurt(q_2 s_2) = q_1^4 kurt(s_1) + q_2^4 kurt(s_2) \quad (3.24)$$

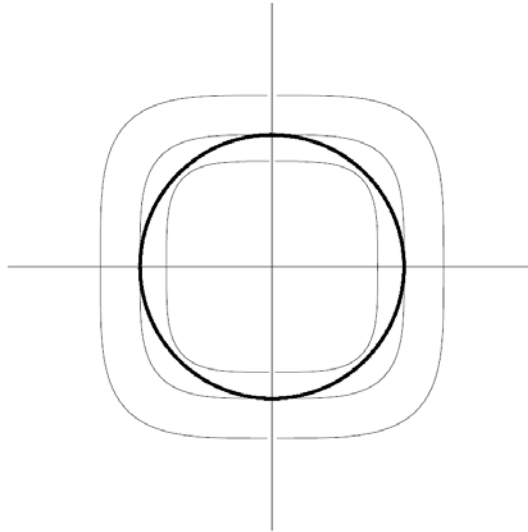
Na osnovu pretpostavki da su varijanse  $s_1$  i  $s_2$  jedinične možemo uvesti i ograničenje da je varijansa promenljive  $y$  jednaka jedinici. Dalje, ovo implicira i ograničenje na  $\mathbf{q}$ :  $E\{y^2\} = q_1^2 + q_2^2 = 1$ . Geometrijski gledano, ovo znači da je vektor  $\mathbf{q}$  ograničen na jediničnom krugu 2–D ravni. *Optimizacioni problem* sada glasi: Gde se nalazi maksimum funkcije  $|kurt(y)|$  na jediničnom krugu:

$$F(\mathbf{q}) = |kurt(y)| = |q_1^4 kurt(s_1) + q_2^4 kurt(s_2)| \quad (3.25)$$

Radi jednostavnosti možemo pretpostaviti da su vrednosti kurtozisa jednaki jedinici (postoje raspodele koje imaju jediničnu vrednost za kurtozis). Tako dolazimo do funkcije:

$$F(\mathbf{q}) = q_1^4 + q_2^4 \quad (3.26)$$

Izolinije ove funkcije prikazane su na slici 3.3. uporedo sa funkcijom  $q_1^2 + q_2^2 = 1$ . Sada se ilustrativno vidi kako se dolazi do maksimizacije optimizacionog problema. Maksimum je određen elementima vektora  $\mathbf{q}$  koji imaju jedan element nula i drugi element različit od nule. Zbog ograničenja datog jediničnim krugom, vidi se da nenulti elementi moraju biti 1 ili  $-1$ . Ove tačke su upravo one u kojima  $y$  uzima vrednosti nezavisnih komponentata  $\pm s_i$ . Ovaj ilustrativni primer prikazuje upotrebu kurtozisa u ICA modelima, a striktan dokaz može se pronaći u [4]



Slika 3.3. Deblja linija predstavlja jedinični krug  $q_1^2 + q_2^2 = 1$ , dok tanke krive predstavljaju izolinerije funkcije  $F(q_1, q_2)$ . Preuzeto iz [4].

### 3.7. FastICA algoritmi

FastICA algoritmi predstavljaju najpopularnije i najčešće korišćene ICA metode. Ove metode predstavljaju iterativne optimizacione algoritme koji rešavaju ICA problem pronalazanjem demiksujuće matrice  $\mathbf{W}$  na osnovu (3.3). Ove iterativne metode traže takvu matricu  $\mathbf{W}$  koja optimizuje nelinearnu kriterijumsku funkciju. Najčešće se primenjuje gradijentni ili Njutnov optimizacioni metod koji pronalazi ekstremnu vrednost kriterijumske funkcije. Kada algoritam dostigne optimalnu tačku kriterijumske funkcije, tj. odredi vrednost matrice  $\mathbf{W}$ , očekuje se da će komponente  $\hat{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}(k)$  biti nezavisne.

#### 3.7.1. Gradijentni algoritam koji koristi *kurtosis* [4]

U ovom pristupu koristi se gradijentni algoritam koji optimizira kriterijumsku funkciju koja se definiše kao apsolutna vrednost kurtosisa od  $\mathbf{y}$ , odnosno od  $\mathbf{w}^T \mathbf{z}$ . Na početku se inicijalizuje proizvoljni početni vektor  $\mathbf{w}$ . Na osnovu vrednosti ovog vektora mi izračunavamo novi vektor u čijem pravcu apsolutna vrednost kurtosisa od  $\mathbf{w}^T \mathbf{z}$  najviše raste i onda pomeramo vektor  $\mathbf{w}$  u tom pravcu. Sama izračunavanja vrše se na osnovu dostupnih podataka miksovane izbeljene promenljive  $\mathbf{z}$ :  $\mathbf{z}(1)$ ,  $\mathbf{z}(2)$ , ...  $\mathbf{z}(T)$ . Na ovoj ideji bazira se implementacija većine gradijentnih algoritama.

Gradijent apsolutne vrednosti kurtosisa od  $\mathbf{w}^T \mathbf{z}$  može se jednostavno izračunati:

$$\frac{\partial |kurt(\mathbf{w}^T \mathbf{z})|}{\partial \mathbf{w}} = 4 \text{sign}(kurt(\mathbf{w}^T \mathbf{z})) \left[ E \left\{ z(\mathbf{w}^T \mathbf{z})^3 \right\} - 3\mathbf{w} \|\mathbf{w}\|^2 \right] \quad (3.27)$$



gde za izbeljene podatke imamo da je  $E\{(w^T z)^2\} = \|w\|^2$ . Kako ovu funkciju optimizujemo na jediničnoj sferi  $\|w\|^2 = 1$ , gradijentni metod mora da se modifikuje projektovanjem vektora  $w$  na jediničnu sferu posle svakog koraka. Ovo se jednostavno postiže deljenjem vektora  $w$  sa svojom normom. Ovaj algoritam se dalje može uprostiti zanemarivanjem poslednjeg člana u (3.27) jer on utiče samo na normu vektora  $w$  u gradijentnom algoritmu, a ne i na njegov pravac. Sama promena u normi vektora nema uticaja na algoritam jer se kasnije on normalizuje na jediničnu vrednost. Nizom koraka dolazimo do sledećeg gradijentnog algoritama:

$$\Delta w \propto \text{sign}\left(\text{kurt}\left(w^T z\right)\right) E\left\{z\left(w^T z\right)^3\right\} \quad (3.28)$$

$$w \leftarrow w/\|w\| \quad (3.29)$$

Pored ove verzije, postoje i razne modifikacije ovog algoritma. Neke polaze od pretpostavke da se unapred poznaje da li je priroda signala super-gausovska ili sub-gausovska. Sa ovom informacijom algoritam se može uprostiti jer se tada zna da li je vrednost kurtozisa pozitivna ili negativna.

### 3.7.2. Fast fixed-point algoritam koji koristi kurtozis [4]

Prethodno izvedeni gradijentni algoritam koristi sve ulazne podatke  $z$  odjednom i na taj način obezbeđuje brzu adaptaciju u nestacionarnom okruženju. Međutim, sama konvergencija je spora pa je kao jedna od alternativa razvijen i *fixed-point* iteracioni algoritam.

Da bi se razvio što efikasniji iteracioni algoritam, primetimo da u stabilnoj tački gradijentnog algoritma, gradijent mora pokazivati u pravcu vektora  $w$ . Tačnije gradijent mora biti jednak vektoru  $w$  pomnožen skalarnom konstantom. Samo u tom slučaju, dodavanjem gradijenta na vektor  $w$ , neće se menjati njegov pravac i nastupiće konvergencija. Ovo se može rigorozno dokazati korišćenjem Lagranžovih multiplikatora. Izjednačavanjem gradijenta kurtozisa u (3.27) sa  $w$  imaćemo:

$$w \propto \left[ E\left\{z\left(w^T z\right)^3\right\} - 3w\|w\|^2 \right] \quad (3.30)$$

Ova jednačina odmah predlaže *fixed-point* algoritam gde mi prvo računamo desnu stranu i onda to prosleđujemo kao novu vrednost za  $w$ :

$$w \leftarrow E\left\{z\left(w^T z\right)^3\right\} - 3w \quad (3.31)$$

Posle svake *fixed-point* iteracije,  $w$  se deli sa svojom normom da ostane na ograničavajućem skupu. Krajnji vektor  $w$  daje nam jednu od nezavisnih komponenti kao linearnu kombinaciju  $w^T z$ . U praksi, operator očekivanja mora se zameniti odgovarajućom procenom.

Ispostavlja se da ovakav algoritam radi veoma dobro i da konvergira brzo i pouzdano [4]. On ima nekoliko osobina koje ga čine superiornijim u odnosu na gradijente algoritme. Konvergencija je veoma brza (trećeg stepena) i za razliku od gradijentnih algoritama ne postoje podešavajući parametri.

### 3.8. Primeri ICA teorije

#### 3.8.1. Cocktail party problem [4]

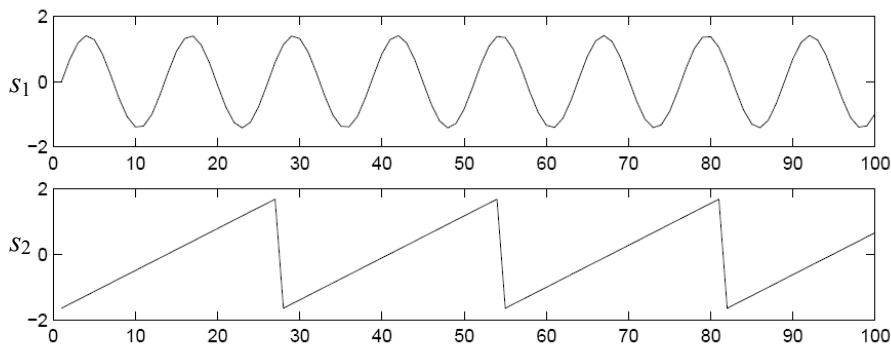
Zamislamo da dve osobe u sobi simultano razgovaraju. U sobi se nalaze dva mikrofona koja su postavljena na dve različite lokacije. Mikrofon snimaju dva vremeska signala koje možemo obeležiti sa  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ , gde su  $x_1$  i  $x_2$  amplitude, a  $t$  predstavlja vremensku promenljivu. Svaki od ova dva snimljena signala predstavlja težinsku sumu govornog signala koje emituju dva sagovornika i možemo ih označiti sa  $s_1$  i  $s_2$ . Ovaj proces se može uprošćeno izraziti linearnim sistemom jednačina:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a_{11}s_1 + a_{12}s_2 \\x_2(t) &= a_{21}s_1 + a_{22}s_2\end{aligned}\tag{3.32}$$

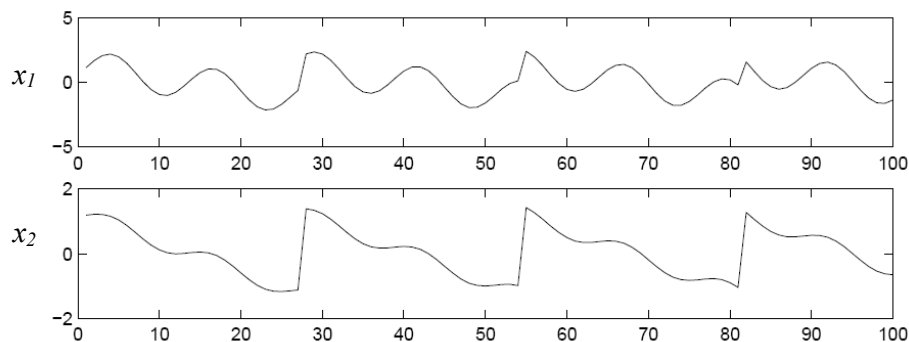
gde  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  predstavljaju parametre koji zavise od udaljenosti mikrofona od osoba koje govore. Za sada ćemo izostaviti sva moguća vremenska kašnjenja govornog signala i ostale faktore kako bi naš model ostao dovoljno uprošćen za dalju ilustraciju. Bilo bi veoma korisno kada bismo mogli da estimiramo dva originalna govorna signala  $s_1$  i  $s_2$ , koristeći se samo signalima  $x_1$  i  $x_2$ . Ovo predstavlja takozvani *cocktail-party* problem.

Pretpostavimo da su govorni signali  $s_1$  i  $s_2$  kao na slici 3.4. Ovo naravno nisu realistični signali govora, ali mogu ilustrativno poslužiti u našem primeru. Neka su na slici 3.5. predstavljeni izmiksovani signali  $x_1$  i  $x_2$ . Problem se dakle sastoji u tome da samo od signala sa slike 3.5 rekonstruišemo signale sa slike 3.4

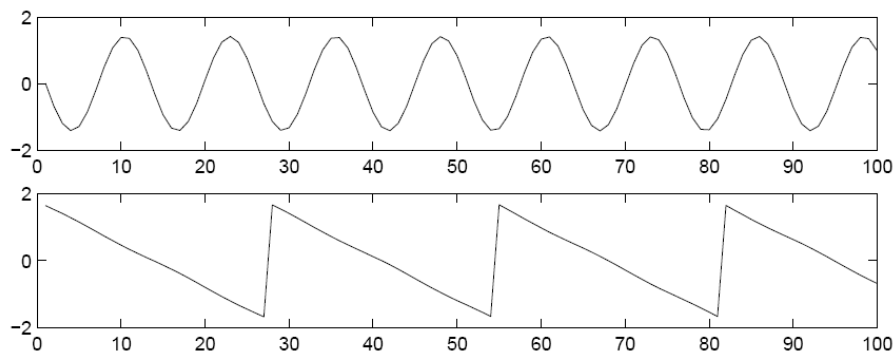
Kada bismo poznavali koeficijente  $a_{ij}$  u sistemu (3.32) klasičnim metodama lako bismo rešili ovaj problem. Međutim, kada koeficijenti  $a_{ij}$  nisu poznati rešenje problema postaje znatno teže.



Slika 3.4. Originalni signali  $s_1$  i  $s_2$

Slika 3.5. Izmiksovani originalni signali snimljeni na mikrofону  $x_1$  i  $x_2$ 

Jedan od pristupa za rešavanje ovog problema bio bi korišćenje informacija o statističkim karakteristikama signala  $s_1$  i  $s_2$  kako bismo estimirali koeficijente  $a_{ij}$ . Ustvari, čak možda i iznenađujuće jednostavno, ispostavlja se da je dovoljno pretpostaviti da su signali  $s_1(t)$  i  $s_2(t)$  statistički nezavisni u svakom trenutku  $t$ . Ovo ne predstavlja nerealističnu pretpostavku u većini slučajeva, a ponekad u praksi ona čak i ne mora u potpunosti da bude strogo zadovoljena. ICA teorija može biti upotrebljena da se estimiraju koeficijenti  $a_{ij}$  na osnovu informacija o njihovoj nezavisnosti, što nam dozvoljava da estimiramo originalne signale  $s_1(t)$  i  $s_2(t)$  iz njihovih izmiksovanih signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ . Na slici 3.6. prikazani su estimirani signali koji su dobijeni uz pomoć ICA metode. Kao što se može videti oni predstavljaju veoma verne replike originalnih signala i mada su oni invertovani, u praksi ovo ne predstavlja veliku važnost.



Slika 3.6. Estimirani signali korišćenjem ICA metode

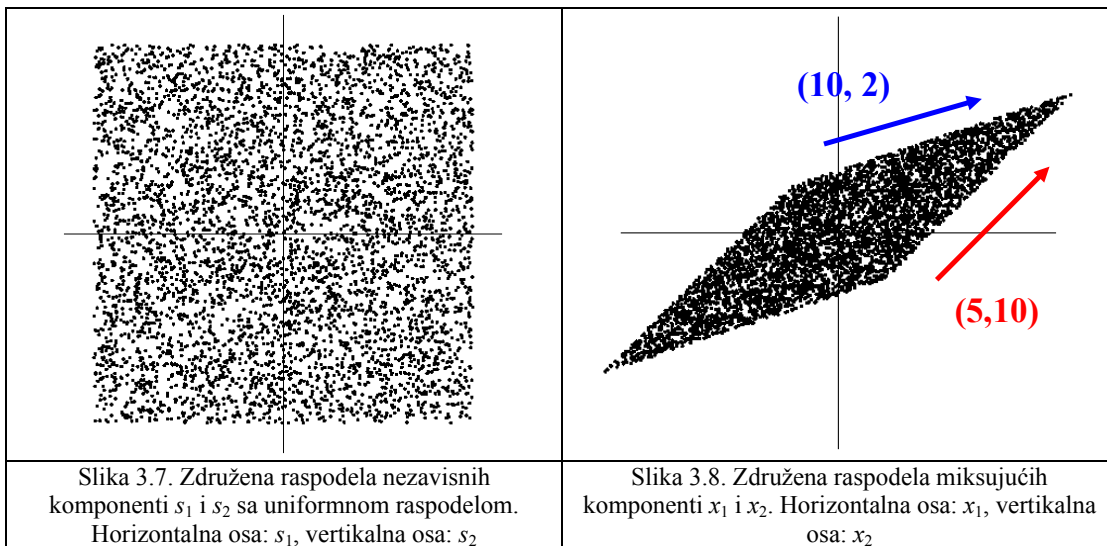
Analiza nezavisnih komponenta (ICA) nastala je prvobitno za rešavanje problema koji su usko povezani sa *cocktail-party* problemom. Skorašnji veliki porast interesovanja za ICA metode, jasno pokazuje da ovaj princip ima i mnoge druge interesantne primene. Tako na primer, elektroencefalogram (EEG) predstavlja električna snimanja moždane aktivnostisa više različitih mesta na koži glave. Pretpostavlja se da su ovi potencijali mešavina komponenti koje potiču od stvarnih moždanih aktivnosti. Ova situacija je veoma slična *cocktail-party* problemu: mi bismo želeli da pronađemo originalne aktivnosti iz unutrašnjosti mozga, dok pritom možemo snimati samo njihove mešavine koje se manifestuju na površini glave. Koristeći ICA metode možemo otkriti mnogo važnih informacija o samoj moždanoj aktivnosti ukoliko estimiramo odgovarajuće nezavisne komponente.

### 3.8.2. Ilustrativni primer ICA-e [4]

Da bismo ilustrovali ICA model, posmatrajmo dve nezavisne komponente koje imaju sledeću uniformnu raspodelu:

$$p(s_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}, & \text{za } |s_i| \leq \sqrt{3} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (3.33)$$

Raspon vrednosti uniformne raspodele izabran je tako da je očekivana srednja vrednost nula i da je varijansa raspodele jedan kao što je prethodno pretpostavljeno za ICA modele. Promenljive  $s_1$  i  $s_2$  su medjusobno uzajamno nezavisne i njihova zajednička gustina verovatnoće predstavljena je na slici 3.7. gde se vidi da je ona uniformna na kvadratu. Sama raspodela ilustrovana je pomoću određenog broja odbiraka uniformne raspodele koja je generisana shodno njenoj gustini verovatnoće.



Interesanto je videti šta se dešava kada se ove dve nezavisne komponente izmiksuju. Možemo koristiti sledeću miksujuću matricu:

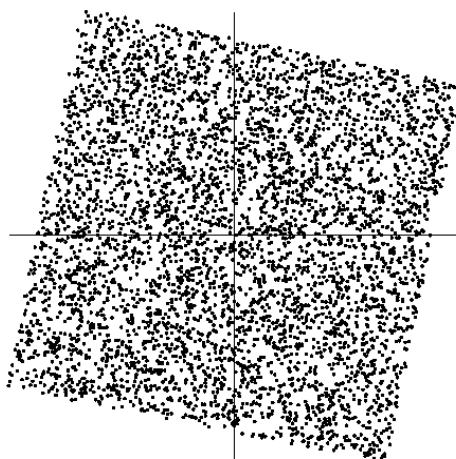
$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Na ovaj način dobijamo dve izmiksovane promenljive  $x_1$  i  $x_2$  koristeći jednačinu (3.2). Lako se uočava da izmiksovani podaci imaju uniformnu raspodelu na paralelogramu, kao što je prikazano na slici 3.8.

Jasno se uočava da slučajne promenljive  $x_1$  i  $x_2$  nisu nezavisne. Nezavisnost promenljivih možemo najlakše ilustrativno potvrditi tako što pokušamo da na osnovu vrednosti jedne promenljive vidimo da li možemo predvideti vrednosti druge. Sa slike se jasno vidi da ukoliko promenljiva  $x_1$  dostiže svoj minimum ili maksimum vrednost promenljive  $x_2$  je u potpunosti određena, te su stoga ove promenljive statistički zavisne.

Problem estimacije modela ICA sveo bi se na estimaciju miksujuće matrice  $\mathbf{A}$  koristeći samo informacije koje dobijamo iz izmiksovanih promenljivih  $x_1$  i  $x_2$ . Sa slike 3.8. intuitivno možemo videti način estimacije matrice  $\mathbf{A}$ : *ivice* paralelograma su u pravicima vektora kolona matrice  $\mathbf{A}$ . Ovo bi značilo da bi mi u principu mogli da prvo estimiramo združenu gustinu  $x_1$  i  $x_2$  i da onda lociramo *ivice* paralelograma. Dati primer pokazuje da ovaj jednostavan i specifično odabran ICA problem može imati rešenje. Ono što je nama potrebno u praksi su ICA algoritmi koji određuju izvorne komponente sa velikom pouzdanošću i brzinom nezavisno od statističke raspodele.

Na ovom primeru može se ilustrovati i grafička interpretacija beljenja. Ukoliko bismo izmiksovane podatke sa slike 3.8 izbelili dobili bismo originalni kvadrat koji je zarotiran (slika 3.9.). Naše komponente su u ovom slučaju nekorelisane, ali nisu i nezavisne. Nezavisnost se postiže pronalaženjem matrice koja će ovaj kvadrat zarotirati na svoju prvobitnu poziciju (slika 3.7.). ICA algoritmi veoma lako rešavaju ovaj problem.



Slika 3.9. Združena raspodela *izbeljenih* miksujućih komponenti  $x_1$  i  $x_2$  sa slike 3.8.

## 4. Independent Component Analysis algoritmi

Popularnost ICA metoda i veoma rasprostranjena primena dovela je do razvoja velikog broja algoritama. Osnovna ideja u rešavanju ICA problema je da se definisana kriterijumska funkcija optimizira. Često se kao optimizacioni kriterijum koristi kurtozis, ali isto tako postoje razni algoritmi koji estimaciju nezavisnih komponenti zasnivaju na *negentropy*-ji ili na maksimalnoj verovatnoći (*maximum likelihood*).

U zavisnosti od prirode problema na koji se primenjuje, određeni ICA algoritam može biti manje ili više uspešan. Neki algoritmi su razvijeni za primenu na signale koji pokazuju određenu korelaciju u vremenu (npr. složenoperiodični signali). Takođe, postoje i grupe algoritama koje su uspešne za separaciju signala čija je glavna karakteristika nestacionarnost.

U ovom master radu ispitana su četiri algoritma za koje se teorijski predpostavljalo da bi najsvrsishodnije estimirali tražene nezavisne komponente, odnosno da bi što tačnije ekstrahovali EKG artefakt iz EEG signala. Neki od njih predstavljaju standardne algoritme koji se najčešće koriste upravo u obradi signala elektroencefalograma. U ovom poglavlju dat je prikaz sledećih algoritama:

- 1) **RobustICA**
- 2) **SOBI** (Second Order Blind Identification)
- 3) **JADE** (Joint Approximation Diagonalization of Eigen matrices)
- 4) **CCA** (Canonical Correlation Analysis)

### 4.1. RobustICA

RobustICA [2] predstavlja jednostavnu, sasvim prirodnu modifikaciju FastICA algoritma. Umesto optimizacione funkcije zasnovane na kurtozisu –  $kurt(\mathbf{w})$ , primenjujemo novu kriterijumsku funkciju koja koristi *tačno linijsko traženje* (exact line search optimization):

$$\mu_{OPT} = \arg \max_{\mu} kurt(\mathbf{w} + \mu \mathbf{g}) \quad (4.1)$$

Za pravac traženja  $\mathbf{g}$  najčešće se koristi pravac gradijenta:

$$\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{w}} kurt(\mathbf{w}) \quad (4.2)$$

*Tačno linijsko traženje* je poznati metod za optimizaciju. Generalno, ova metoda je računski veoma kompleksna i poseduje druge nedostatke, pa se veoma retko koristi u praksi. Međutim, za kriterijumsku funkciju koja se može izraziti u obliku racionalne funkcije ova metoda može biti veoma efikasna. Kriterijumska funkcija kod RobustICA algoritma može se izraziti kao racionalna funkcija po  $\mu$ , a veličina optimalnog koraka  $\mu_{opt}$  može se jednostavno odrediti pronalazanjem korena polinoma. Kriterijumska funkcija izražena preko kurtozisa je polinom četvrtog stepena i nule ovog polinoma se uvek mogu pronaći.

Shodno prethodnom, optimizacija kriterijumske funkcije može se izvršiti sledećim RobustICA algoritmom. Pri svakoj iteraciji, veličina optimalnog koraka–OS (engl. Optimal Step size) optimizira se sledećim koracima:

1) Izračunavanje OS polinomijalnih koeficijenata.

Za funkciju kurtozisa, polinomijalni OS definisan je sa:

$$p(\mu) = \sum_{k=0}^4 a_k \mu^k \quad (4.3)$$

Koeficijenti  $a_k$  izračunavaju se pri svakoj iteraciji iz posmatranog signala i trenutnih vrednosti vektora  $\mathbf{w}$  i  $\mathbf{g}$ . Detaljni izrazi za izračunavanje nalaze se u [2].

2) Nalaženje OS polinomijalnih korena  $\{\mu_k\}_{k=1}^4$

3) Izbor korena koji vodi do apsolutnog ekstremuma:

$$\mu_{opt} = \arg \max_k kurt(\mathbf{w} + \mu_k \mathbf{g}) \quad (4.4)$$

4) Izračunavanje vektora  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mu_{opt} \mathbf{g} \quad (4.5)$$

5) Normalizovanje vektora  $\mathbf{w}$ .

Dakle, RobustICA predstavlja algoritam koji metodom *exact line search* optimizacije pronalazi optimalni vektor  $\mathbf{w}$  i na taj način se jedna po jedna (*deflation based*) izdvajaju nezavisne komponente. RobustICA se zasniva na FastICA algoritmu koji je popularan zbog svoje jednostavnosti. RobustICA predstavlja superiorniji algoritam u pogledu efikasnosti i robusnosti u odnosu na FastICA.

## 4.2. SOBI (Second Order Blind Identification)

SOBI algoritam razvijen je koristeći pristup o vremenskoj koherentnosti signala i zasniva se na stacionarnoj statistici drugog reda [3]. Za razliku od algoritama koji se zasnivaju na temporalnoj korelaciji, očekuje se da SOBI algoritam bude robusniji pri malim odnosima signal/šum pošto koristi statistiku drugog reda. Osnovni ICA model koji se koristi u izvođenju SOBI algoritma uvodi pretpostavku da je prisutan i šum merenja:

$$x(t) = y(t) + n(t) = \mathbf{A}s(t) + n(t) \quad (4.6)$$

Takođe pretpostavićemo opštiji slučaj da je matrica  $\mathbf{A}$  kompleksna, punog ranga i dimenzija  $m \times n$  (naravno mora važiti  $m \geq n$ ). Za aditivni šum  $n(t)$  pretpostavićemo da je beli šum, nezavistan od signala  $s(t)$ , za koji je ispunjeno:

$$E\{\mathbf{n}(t+\tau)\mathbf{n}^*(t)\} = \sigma^2 \delta(\tau) \mathbf{I} \quad (4.7)$$

Pod ovim pretpostavkama kovarijacione matrice izlaza imaće sledeće oblike:

$$\mathbf{R}(0) = E\{x(t)x^*(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s(0)\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{R}(\tau) = E\{x(t)x^*(t+\tau)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s(\tau)\mathbf{A}^H \quad (4.9)$$

gde  $^H$  predstavlja konjugovano kompleksno transponovanje matrice.

Kao i za sve ICA algoritme egzaktno određivanje miksujuće matrice  $\mathbf{A}$  nije moguće. U SOBI pristupu se takođe, bez umanjenja opštosti, pretpostavlja da varijanse nekorelisanih signala  $s(t)$  imaju jedinične varijanse, odnosno da je:

$$\mathbf{R}_s(0) = \mathbf{I}, \text{ pa je } \mathbf{R}_y(0) \stackrel{def}{=} E\{y(t)y^*(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H \quad (4.10)$$

Normalizacija varijanse signala  $s(t)$  i dalje ostavlja nedefinisan raspored kolona matrice  $\mathbf{A}$ . Stoga ćemo određivanje matrice  $\mathbf{A}$  ograničiti na skup matrica koje su *esencijalno jednake* sa matricom  $\mathbf{A}$ . Ukoliko postoji matrica  $\mathbf{P}$ , tako da je  $\mathbf{M}=\mathbf{N}\mathbf{P}$ , kažemo da su matrice  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{N}$  esencijalno jednake i ovo obeležavamo sa  $\mathbf{M} \square \mathbf{N}$ .

#### - Metod identifikacije drugog reda

Prvi korak u ovoj proceduri sastoji se u *beljenju* signala  $y(t)$  naših opservacija. Ovo se postiže korišćenjem matrice  $\mathbf{W}$ , tako da imamo:

$$E\{\mathbf{W}\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^*(t)\mathbf{W}^H\} = \mathbf{W}\mathbf{R}_y(0)\mathbf{W}^H = \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{W}^H = \mathbf{I} \quad (4.11)$$

Vidimo da ukoliko je  $\mathbf{W}$  matrica beljenja, tada je  $\mathbf{W}\mathbf{A}$  *unitarna* matrica dimenzija  $n \times n$ . Sledi da za svaku matricu beljenja  $\mathbf{W}$ , uvek imamo unitarnu maticu  $\mathbf{U}$  ( $\mathbf{U}^*\mathbf{U}=\mathbf{I}$  i  $\mathbf{U}\mathbf{U}^*=\mathbf{I}$ ), tako da je ispunjeno  $\mathbf{W}\mathbf{A}=\mathbf{U}$ . Kao posledicu ovoga matricu  $\mathbf{A}$  možemo faktorisati kao:

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^\# \mathbf{U} \quad (4.12)$$

gde superskirpt  $^\#$  predstavlja *Moore–Penrose* pseudoinverziju. Ova transformacija beljenja redukuje određivanje miksujuće matrice  $\mathbf{A}$  koja je dimenzija  $m \times n$ , na određivanje unitarne matrice  $\mathbf{U}$  čije su dimenzije  $n \times n$ .

Za izbeljeni signal  $z(t)$  i dalje se koristi linearni model:

$$\mathbf{z}(t) \stackrel{def}{=} \mathbf{W}\mathbf{x}(t) = \mathbf{W}[\mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)] = \mathbf{U}\mathbf{s}(t) + \mathbf{W}\mathbf{n}(t) \quad (4.13)$$

gde sada  $\mathbf{U}$  predstavlja “unitarnu miksujuću“ matricu. Matricu beljenja  $\mathbf{W}$ , možemo odrediti preko kovarijacione matrice  $\mathbf{R}(0)$  uz pretpostavku da se kovarijaciona matrica šuma može estimirati. Ovo određivanje matrice  $\mathbf{W}$  vrši se kombinovanjem prethodnih relacija tako da imamo:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{R}(0) - \sigma^2\mathbf{I} \quad (4.14)$$



Matrica beljenja  $\mathbf{W}$ , može se isto tako odrediti iz linearne kombinacije skupa kovarijacionih matrica za različite vremenske trenutke  $\tau$ . U oba slučaja, ostaje nam da pored matrice beljenja pronađemo i unitarni faktor u matrici  $\mathbf{A}$ . Unitarni faktor  $\mathbf{U}$  možemo pronaći koristeći se statistikom višeg reda.

#### - Određivanje unitarnog faktora

Posmatrajmo prostorno izbeljenu kovarijacionu matricu  $\underline{\mathbf{R}}(\tau)$  definisanu kao:

$$\underline{\mathbf{R}}(\tau) = \mathbf{W}\mathbf{R}(\tau)\mathbf{W}^H, \quad \forall \tau \neq 0 \quad (4.15)$$

Ova  $n \times n$  kompleksna matrica predstavlja u suštini kovarijacionu matricu signala  $z(t)$ . Koristeći se prethodnim jednačinama možemo dobiti ključnu relaciju:

$$\underline{\mathbf{R}}(\tau) = \mathbf{U}\mathbf{R}_s(\tau)\mathbf{U}^H, \quad \forall \tau \neq 0 \quad (4.16)$$

Kako je  $\mathbf{U}$  unitarna matrica, a  $\mathbf{R}_s(\tau)$  dijagonalna možemo doći do sledećeg zaključka: svaka izbeljena kovarijaciona matrica je dijagonalizovana sa unitarnom transformacijom  $\mathbf{U}$ .

Kao posledica ovoga, unitarni faktor  $\mathbf{U}$  može se dobiti unitarnom dijagonalizacijom izbeljene kovarijacione matrice  $\underline{\mathbf{R}}(\tau)$  za neko vreme  $\tau$ . Određivanje vremenske konstante  $\tau$  koje bi obezbedilo unitarnu dijagonalizaciju nije trivijalno i ne može se *a priori* proveriti. Ova vremenska konstanta  $\tau$  mora da obezbedi da matrica  $\underline{\mathbf{R}}(\tau)$  poseduje *jedinstvene sopstvene vrednosti*.

Problem postaje znatno pogodniji za rešavanje ukoliko posmatramo simultanu dijagonalizaciju skupa koji se sastoji od  $K$  kovarijacionih matrica:

$$\{\underline{\mathbf{R}}(\tau_i) | i = 1, 2, \dots, K\} \quad (4.17)$$

Na ovaj način obezbeđujemo postojanje unitarne matrice  $\mathbf{U}$ , a dijagonalizaciju skupa kovarijacionih matrica vršimo pomoću metode *združene dijagonalizacije* (joint diagonalization). Ovaj pristup odstranjuje verovatnoću nepodesnog izbora parametra  $\tau$  koja može rezultovati nemogućnosti određivanja matrice  $\mathbf{U}$ .

#### – Joint Diagonalization

U numeričkoj analizi definiše se operator “off” na  $n \times n$  matrici  $\mathbf{M}$ , sa elementima  $M_{ij}$  kao:

$$off(\mathbf{M}) \stackrel{def}{=} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} |M_{ij}|^2 \quad (4.18)$$

i unitarna dijagonalizacija matrice  $\mathbf{M}$ , ekvivalentna je izjednačavanju sa nulom veličinu  $off(\mathbf{V}^H\mathbf{M}\mathbf{V})$  gde je  $\mathbf{V}$  neka unitarna matrica.

Podsetimo se da spektralna teorma kaže da se samo normalne matrice ( $\mathbf{M}^H\mathbf{M}=\mathbf{M}\mathbf{M}^H$ ) mogu unitarno dijagonalizovati, tj. predstaviti u obliku  $\mathbf{M}=\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ . Ovde je matrica  $\mathbf{U}$  unitarna, dok je matrica  $\mathbf{D}$  sa različitim dijagonalnim elementima. Takođe, ukoliko imamo matricu  $\mathbf{V}$  *esencijalno* jednaku matrici  $\mathbf{U}$ , tj.  $\mathbf{U} \square \mathbf{V}$ , imaćemo da je  $off(\mathbf{V}^H\mathbf{M}\mathbf{V})=0$ .

Posmatrajmo sada skup od  $K$  matrica dimenzija  $n \times n$ :  $\theta = \{\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_K\}$ . Kriterijum združene dijagonalnosti (*joint diagonality*–JD) definiše se za neku matricu  $\mathbf{V}$ , dimenzije  $n \times n$ , kao nenegativna funkcija po  $\mathbf{V}$ :

$$C(\theta, \mathbf{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1, K} \text{off}(\mathbf{V}^H \mathbf{M}_k \mathbf{V}) \quad (4.19)$$

Za unitarnu matricu se kaže da združeno dijagonalizira skup matrica  $\theta$ , ukoliko minimizira JD kriterijumsku funkciju  $C$  po skupu svih unitarnih matrica. Bitno je istaći da globalni minimum ovog kriterijuma uvek postoji, a sam postupak dijagonalizacije vrši se numerički efikasnim algoritmom. Ovaj algoritam je generalizacija *Jacobi* tehnike za dijagonalizaciju Hermitskih matrica i koristi *Given*–sove rotacione faktore.

### - Implementacija SOBI algoritma

Zasnovano na prethodnim podsekcijama sada možemo uvesti SOBI (Second Order Blind Identification) algoritam. On se definiše na implementaciji sledećih koraka:

- 1) Procenjuje se kovarijaciona matrica  $\hat{\mathbf{R}}(0)$  na osnovu  $T$  odbiraka signala. Bira se prvih  $n$  najvećih sopstvenih vrednosti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  i  $n$  odgovarajućih sopstvenih vektora  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . estimirane kovarijacione matrice  $\hat{\mathbf{R}}(0)$ .
- 2) Pod pretpostavkama o aditivnom belom šumu, procenu varijanse šuma  $\hat{\sigma}^2$  određujemo kao srednju vrednost  $n-m$  najmanjih sopstvenih vrednosti matrice  $\hat{\mathbf{R}}(0)$ . Izbeljeni signali  $z_i(t)$  i matrica beljenja  $\mathbf{W}$  računaju se prema sledećim formulama:

$$z_i(t) = (\lambda_i - \hat{\sigma}^2)^{-(1/2)} \mathbf{h}_i^* \mathbf{x}(t), \quad \text{za } i = 1..n \quad (4.20)$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \left[ (\lambda_1 - \hat{\sigma}^2)^{-(1/2)} \mathbf{h}_1, \dots, (\lambda_n - \hat{\sigma}^2)^{-(1/2)} \mathbf{h}_n \right]^H \quad (4.21)$$

- 3) Formirati procene  $\hat{\mathbf{R}}(\tau)$  kovarijacionih matrica signala  $\mathbf{z}(t)$  na osnovu fiksong skupa vremenskih pomeraja  $\tau \in \{\tau_j \mid j = 1, \dots, K\}$
- 4) Unitarna matrica  $\hat{\mathbf{U}}$  se dobija združenom dijagonalizacijom skupa  $\{\hat{\mathbf{R}}(\tau_i) \mid i = 1, 2, \dots, K\}$
- 5) Nezavisne komponente  $s$  (*source signals*) i miksujuća matrica  $\mathbf{A}$  dobijaju se iz sledećih relacija:

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= \hat{\mathbf{U}}^H \hat{\mathbf{W}} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{A}} &= \hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

### 4.3. JADE (Joint Approximation Diagonalization of Eigen matrices)

JADE algoritam je ICA metoda za identifikaciju demiksujućih matrica [16]. Ova metoda zasnovana je na dva procesa:

- 1) dijagonalizacija kovarijacione matrice (isto kao i kod PCA metode)
- 2) dijagonalizacija kurtozisne matrice opservacionog vektora.

Sam JADE algoritam može se implementirati sledećim koracima:

- 1) Inicijalna faza u kojoj se koristi PCA metoda. Prvo se kreira kovarijaciona matrica od signala  $\mathbf{x}$ . Koristeći se metodom *rastavljanja na sopstvene vrednosti* (eigenvalue decomposition–EVD) vrši se beljenje matricom:

$$\mathbf{W}_{SVD} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{E}^T \quad (4.23)$$

gde  $\mathbf{E}$  predstavlja ortogonalnu matricu sopstvenih vektora  $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$  i gde  $\mathbf{D}$  predstavlja dijagonalnu matricu sopstvenih vrednosti,  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Dakle, dobijamo da je:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}_{SVD} \mathbf{x} \quad (4.24)$$

- 2) Izračunavaju se kumulantske (kurtozisne) matrice četvrtog reda  $\mathbf{Q}_i$  od formiranog signala  $\mathbf{y}$ .
- 3) Vrši se dijagonalizacija kurtozisnih matrica. U ovom koraku izračunava se transformaciona matrica  $\mathbf{V}$  koja se dobija tako da su sve kumulantske matrice što je moguće više dijagonalne. Ovo se postiže pronalaženjem matrice  $\mathbf{V}$  koja minimizuje sve elemente van glavne dijagonale matrice.
- 4) Formira se separaciona matrica  $\mathbf{W}_{SVD} \mathbf{V}^T$  i primenjuje se na originalni signal.

Bitno je istaći da je dijagonalizacija kumulantnih matrica mnogo komplikovaniji proces nego PCA metoda uglavnom zbog četvero–dimenzijalne tenzorske prirode kumulantskih matrica. Umesto korišćenja četvero–dimenzijalnih matrica, kumulantske matrice se izražavaju u obliku skupa dvodimenzijalnih matrica gde je svaki element matrice izražen kao:

$$\mathbf{Q}_{ij} = \sum_{k,l=1}^M \text{cum}(X_i, X_j, X_k, X_l) \quad (4.25)$$

Dakle, ukoliko imamo  $T$  odbiraka sa svakog od  $M$  senzora, skup kumulantskih matrica može se izračunati na sledeći način. Pretpostavimo da matrica  $\mathbf{X}$  označava  $M \times T$  matricu koja sadrži sempleve sa svih  $M$  senzora i da vektori  $\mathbf{x}_i$  i  $\mathbf{x}_j$  ( $i$ -ti i  $j$ -ti red matrice  $\mathbf{X}$ ) označavaju  $T$  sempleva sa senzora  $i$  i  $j$  respektivno. JADE algoritam izračunava serije od  $M \times M$  kumulantnih matrica  $\mathbf{Q}_{ij}$  kao:

$$\mathbf{Q}_{ij} = (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{X}^T \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq M \quad (4.26)$$

gde je  $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$  skalarni proizvod vektora – odnosno “element puta element“ množenje dva vektora  $\mathbf{x}_i$  i  $\mathbf{x}_j$  dimenzija  $T \times 1$ . Rezultujući  $T \times 1$  vektor se zatim množi sa svakim redom matrice  $\mathbf{X}$  dimenzija  $M \times T$ , a ovaj rezultat se završno množi sa matricom  $\mathbf{X}^T$  dimenzija  $T \times M$  i na taj način dobijamo matricu  $\mathbf{Q}_{ij}$  dimenzija  $M \times M$ .

#### 4.4. CCA (Canonical Correlation Analysis)

Pretpostavimo da nam je poznat signal opservacije  $\mathbf{x}(t)$  koji je nastao miksovanjem nezavisnih komponenta  $s(t)$  i da važi linearni ICA model:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) \quad (4.27)$$

gde je  $\mathbf{A}$  nepoznata miksujuća matrica. Cilj je ponovo da se odrede originalni signali  $s(t)$ . Kanonična korelaciona analiza (CCA) rešava ovaj problem tako što nameće originalnim signalima  $s(t)$  da budu uzajamno nekorelisani i maksimalno korelisani sa predefinisanim funkcijom.

Neka je signal  $\mathbf{x}(t)$  opservirana matrica sa  $K$  signala i  $N$  odbiraka; tada možemo kreirati predefinisano funkciju  $\mathbf{y}(t)$  kao vremeski zakašnjenju verziju originalne matrice podataka, da bismo nezavisne komponente  $\mathbf{s}(t)$  uslovili da budu maksimalno autokorelisane:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t-1) \quad (4.28)$$

Kada se srednja vrednost svakog reda oduzme u matricama  $\mathbf{x}(t)$  i  $\mathbf{y}(t)$ , CCA poseduje dva skupa bazičnih vektora, jedan za  $\mathbf{x}$  i drugi za  $\mathbf{y}$ , tako da korelacije između projekcija promenljivih na ove bazične vektore budu uzajamno maksimalne. Posmatrajmo linearne kombinacije komponenti u  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ :

$$\begin{aligned} x &= w_{x1} \cdot x_1 + \dots + w_{xK} \cdot x_K = \mathbf{w}_x^T \cdot \mathbf{x} \\ y &= w_{y1} \cdot y_1 + \dots + w_{yK} \cdot y_K = \mathbf{w}_y^T \cdot \mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.29)$$

CCA pronalzi vektore  $\mathbf{w}_x$  i  $\mathbf{w}_y$  koji maksimizuju korelaciju  $\rho$  između  $x$  i  $y$  rešavajući sledeći maksimizacioni problem:

$$\max_{\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y} \rho(x, y) = \frac{E\{xy\}}{\sqrt{E\{x^2\} \cdot E\{y^2\}}} = \frac{\mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{w}_y}{\sqrt{(\mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{w}_x)(\mathbf{w}_y^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{w}_y)}} \quad (4.30)$$

gde su  $\mathbf{C}_{xx}$  i  $\mathbf{C}_{yy}$  kovarijacione matrice od  $x$  i  $y$ , respektivno, dok je  $\mathbf{C}_{xy}$  kros-kovarijaciona matrica. Maksimizacija ovog problema se vrši tako što se izvodi po  $\mathbf{w}_x$  i  $\mathbf{w}_y$  izjednačavaju sa nulom, što posle nekoliko računskih koraka, rezultuje u sledeća dva problema:

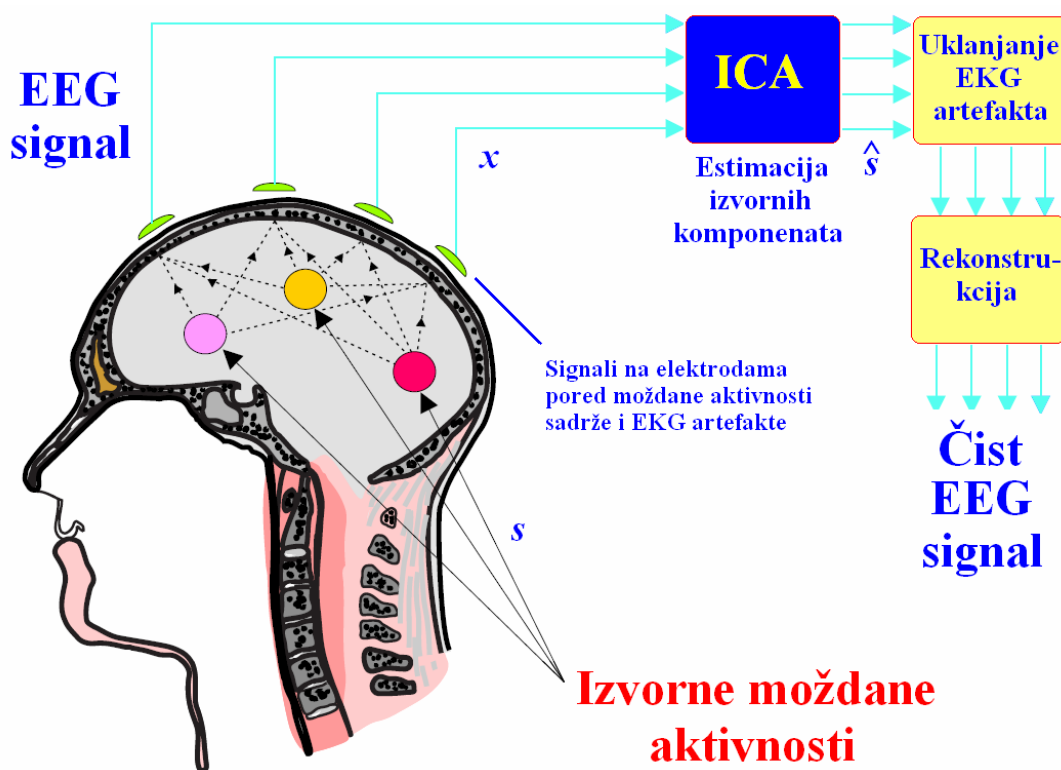
$$\begin{cases} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_x = \rho^2 \hat{\mathbf{w}}_x \\ \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_y = \rho^2 \hat{\mathbf{w}}_y \end{cases} \quad (4.31)$$

Rešavanjem po  $\hat{\mathbf{w}}_x$  dobijamo  $K$  rešenja  $\{\rho_i, \hat{\mathbf{w}}_{xi}\}$ ,  $i = 1..K$ . Procene nezavisnih komponenata dobijamo dalje korišćenjem relacije  $\hat{s}_i(t) = \hat{\mathbf{w}}_{xi}^T \mathbf{x}(t)$ .

## 5. Metode rešavanja problema

### 5.1. Uklanjanje EKG artefakta

U cilju uklanjanja samog EKG artefakta, signal EEG-a se dekomponuje na nezavisne komponente koristeći se ICA metodom. Pokazano je da je EEG signal sa 20 kanala dovoljan da bi se estimirale izvorne moždane aktivnosti [10], te su osnovne pretpostavke za korišćenje ICA metode ispunjene (broj signala opservacija mora biti veći ili jednak od broja izvornih signala). Estimirane, ICA nezavisne komponente predstavljaju električnu aktivnost mozga, a među njima se nalaze i one komponente koje predstavljaju EKG artefakte.



Slika 5.1. Proces uklanjanja EKG artefakta iz EEG signala korišćenjem ICA metode

Posebnim algoritmom detektuju se komponente za koje se smatra da su artefakti EKG-a, uklanjaju se, a potom se preostale komponente rekonstruišu i tako dobijamo čist EEG signal (Slika 5.1).

Postupak uklanjanja EKG artefakta je isti pri upotrebi bilo kog ICA algoritma, ali rezultati koji se dobijaju su drastično različiti. Različiti ICA algoritmi koji se primenjuju na EEG signal daju različite izlazne rezultate. Veoma često dobijaju se rezultati gde se u zavisnosti od primenjenog ICA algoritma razlikuje i sam broj estimiranih nezavisnih komponenti.

Nakon primene ICA algoritma dobija se određni broj nezavisnih komponenta koje predstavljaju EKG artefakte. Broj komponenta može se kretati od jedne do nekoliko, a postojaće i slučajevi kada neće postojati ni jedna komponenta za koju se pretpostavlja da potiče

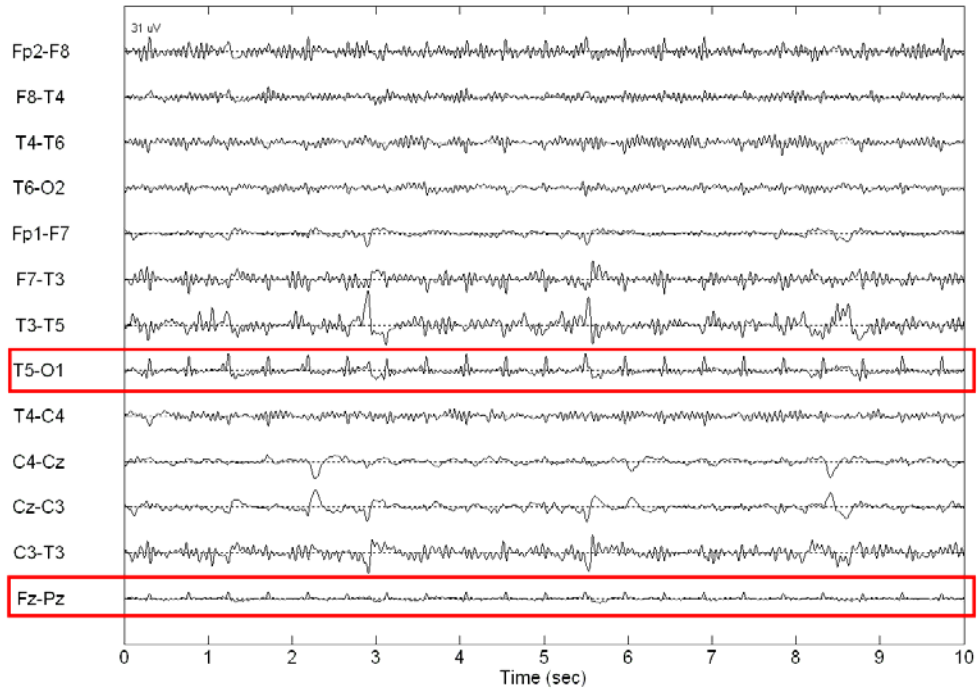
od EKG artefakta. Ova identifikacija se obavlja u procesu klasifikacije i ona nije detaljno razmatrana u ovom radu.

Kada se neke komponente klasifikuju kao EKG artefakti zahteva se da su one u što većoj meri nezavisne od ostalih komponenti koje predstavljaju moždanu aktivnost. Cilj je da one u sebi ne sadrže korisne informacije o moždanoj aktivnosti koje bi se mogle izgubiti u procesu filtracije. Takođe, bitno je da i ostale nezavisne komponente koje se ne uklanjaju, ne sadrže u sebi električne aktivnosti srčanog mišića. Efikasnost ovih zahteva zavisi od primenjenog ICA algoritma i uspešnosti njegove separacije EEG signala na međusobno nezavisne, izvorne komponente.

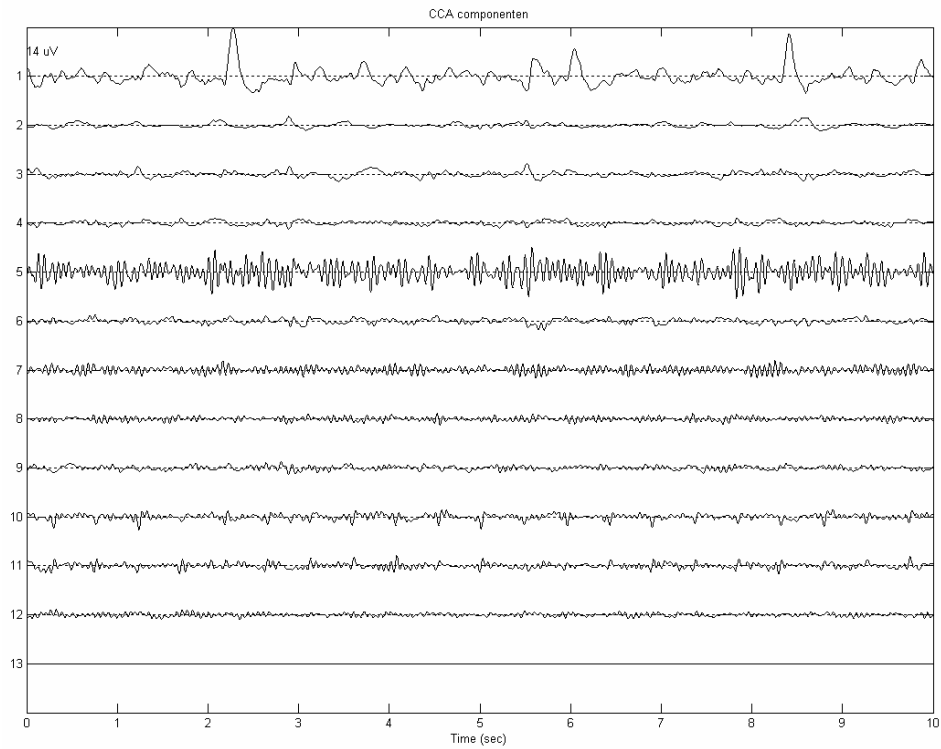
Sama priroda i pravilnost EKG artefakta ostaje nepoznata i teško ju je opisati. EKG artefakt je u toku snimanja uvek prisutan, ali njegova degradacija EEG-a varira od neznatne do veoma velike. Ono što ipak možemo da utvrdimo je da određene nezavisne komponente zaista predstavljaju EKG artefakte. Ovi signali su u određenoj meri korelisani sa samim signalom EKG-a koji se snima uporedo sa EEG signalom.

Svi EEG signali koji su korišćeni u ovom radu snimljeni su u dečijoj bolnici "Sophia" (Sophia Children Hospital) koja predstavlja deo univerzitetskog medicinskog centra u Roterdamu u Holandiji. Radi ilustracije predstavljen je snimljeni EEG signal u trajanju od 10 sekundi na slici 5.2. Jasno se uočava da na određenim kanalima postoji pristustvo EKG artefakta. Dati segment EEG signala je dekomponovan korišćenjem ICA algoritama i to je respektivno prikazano na slikama 5.3, 5.4 i 5.5. Izlazi algoritama daju komponente različitih oblika, a neke od njih na osnovu svoje morfologije jasno ukazuju da predstavljaju EKG artefakte. Algoritmi JADE i SOBI su na ovom segmentu izdvojili komponentu koja je očigledno korelisana sa signalom EKG-a (komponente 2 na slikama 5.4 i 5.5). Za ovaj segment EEG signala CCA algoritam je estimirao dve komponente kod kojih je prisutna korelisanost sa EKG signalom (komponente 10 i 11 na slici 5.3).

Ovaj rad upravo ima za cilj da se odredi ICA algoritam koji najefikasnije vrši ekstrakciju EKG artefakta. Stepenn degradacije EEG signala ne poznaje se unapred, ne zna se kada će se pojaviti EKG artefakt u EEG signalu, niti je poznata njegova morfologija. Dakle, kako je signal EKG artefakta nestacionaran i nepredvidiv možemo praktično reći da je nepoznat. Da bismo mogli da procenimo koliko su estimirane nezavisne komponente korelisane sa EKG artefaktom mi ih moramo direktno upoređivati. Stoga, mi možemo pokušati da na određeni način modelujemo EKG artefakt i veštački ga generišemo. Sintetizovani EKG artefakt možemo superponirati na čist EEG signal, a potom upoređivati estimirane komponente sa samim EKG artefaktom.

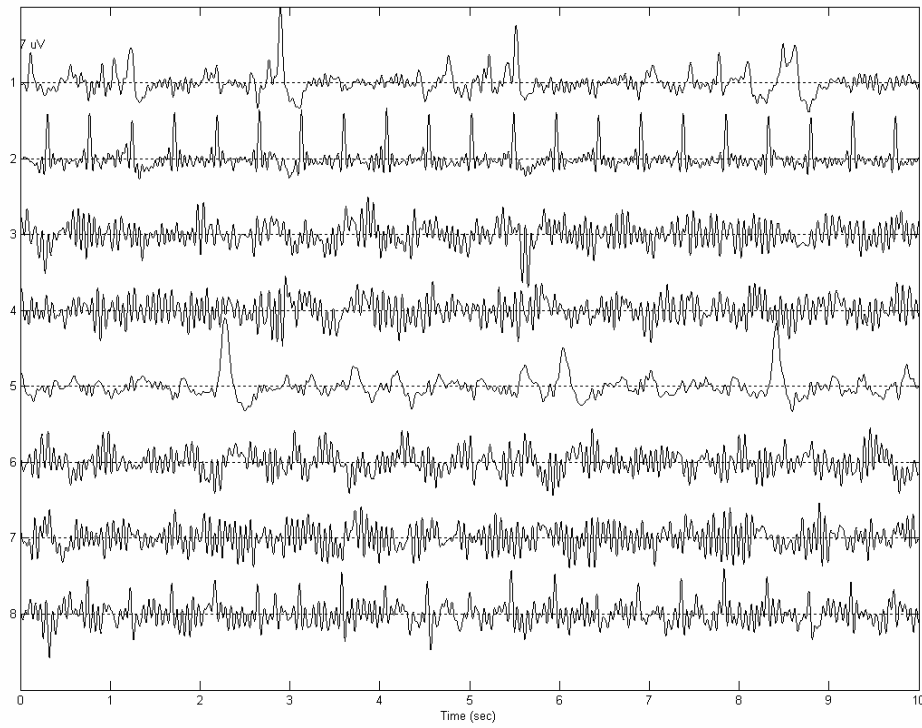


Slika 5.2. Prikaz diferencijalnog EEG signala i kanali na kojima se vidi prisustvo EKG artefakta. Signal je korišćen u simulacijama tokom izrade ovog master rada

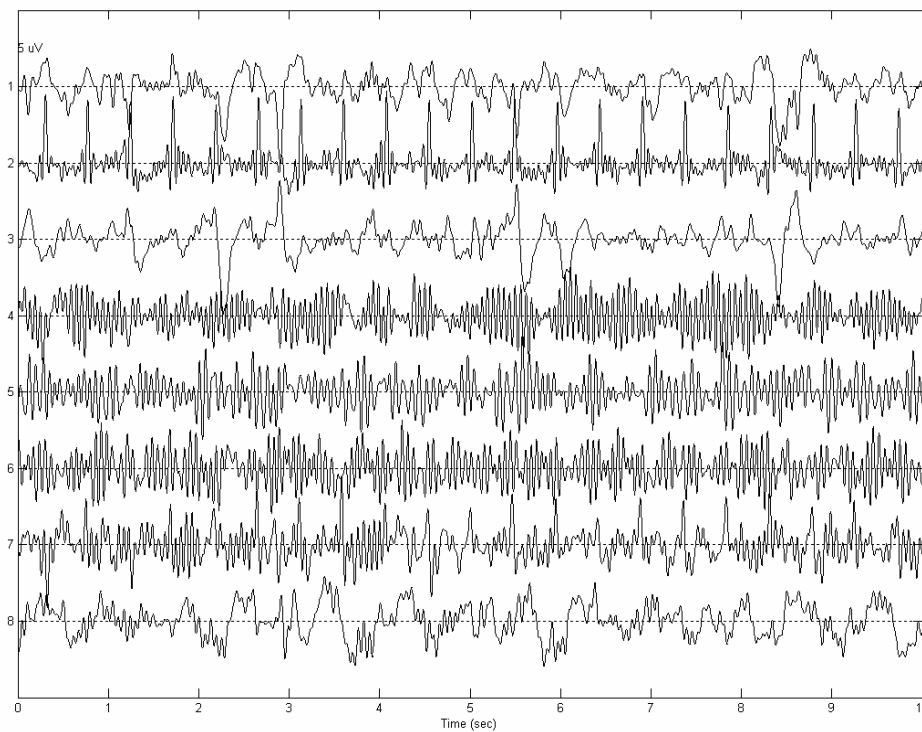


Slika 5.3. Estimirane nezavisne komponente segmenta EEG-a sa slike 5.2 korišćenjem CCA algoritma





Slika 5.4. Estimirane nezavisne komponente segmenta EEG-a sa slike 5.2 korišćenjem JADE algoritma



Slika 5.5. Estimirane nezavisne komponente segmenta EEG-a sa slike 5.2 korišćenjem SOBI algoritma

## **5.2. Modelovanje EKG artefakta**

Da bismo kvantifikovali efikasnost ICA algoritama potrebno je proceniti sa kolikom tačnošću određeni algoritam estimira originalnu izvornu komponentu. U želji da izvršimo ovakvo poređenje mi ćemo modelovati EKG artefakt, tačnije pretpostavićemo da nam je poznat. Ovaj modelovani artefakt ćemo izmiksovati sa čistim neonatalnim EEG signalom (za koji je utvrđeno da je prisustvo EKG artefakta minimalno) i na ovako dobijeni signal ćemo primenjivati ICA algoritme. Izlazi ICA algoritama, tj. nezavisne komponente sadržeće i estimaciju originalnog modelovanog EKG artefakta. Na ovaj način moći ćemo da izvršimo poređenje ICA algoritama i da izaberemo najefikasniji za ovu primenu.

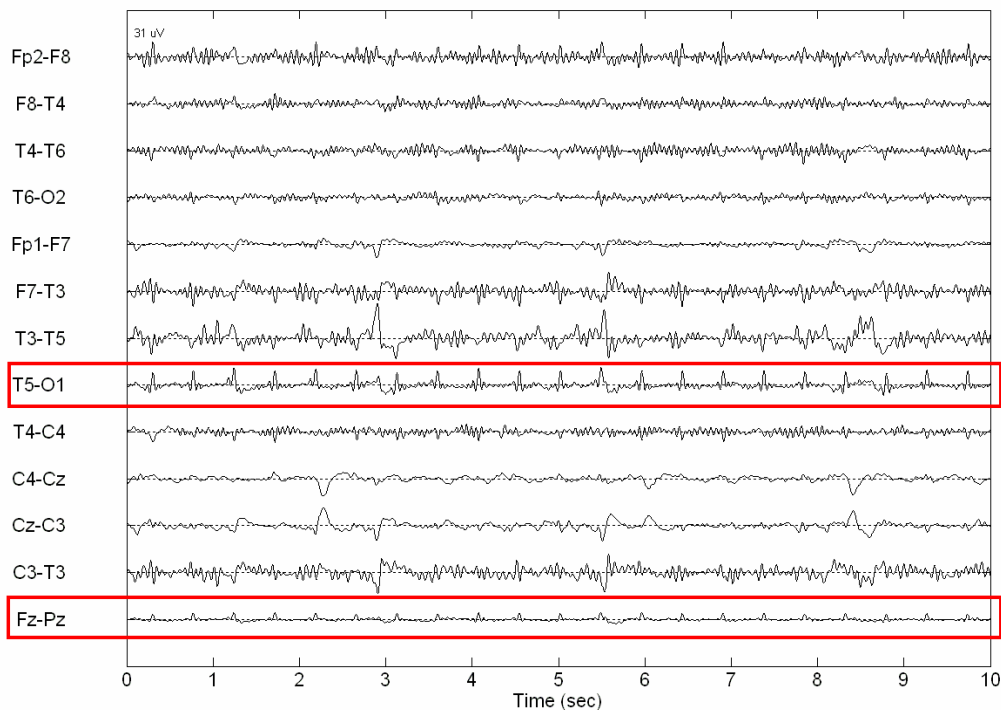
U našim simulacijama korišćeni su pravi podaci snimljeni na novorođenčadima u periodu od 24 časa. Korišćene su standardne kliničke tehnike snimanja EEG signala metodom 10–20. Frekvencija odabiranja prilikom snimanja iznosila je 256 Hz. Uporedo sa EEG signalom snimana je i aktivnost srčanog mišića–EKG sa istom periodom odabiranja. Informacije o položaju EKG elektroda za snimljene podatke nisu bile dostupne.

Nakon proučavanja statističkih karakteristika EKG artefakta odlučeno je da se on modeluje kao kombinacija dva signala [9]. Ovi signali treba da aproksimiraju glavne karakteristike EKG artefakta koji se pojavljuju u EEG signalima.

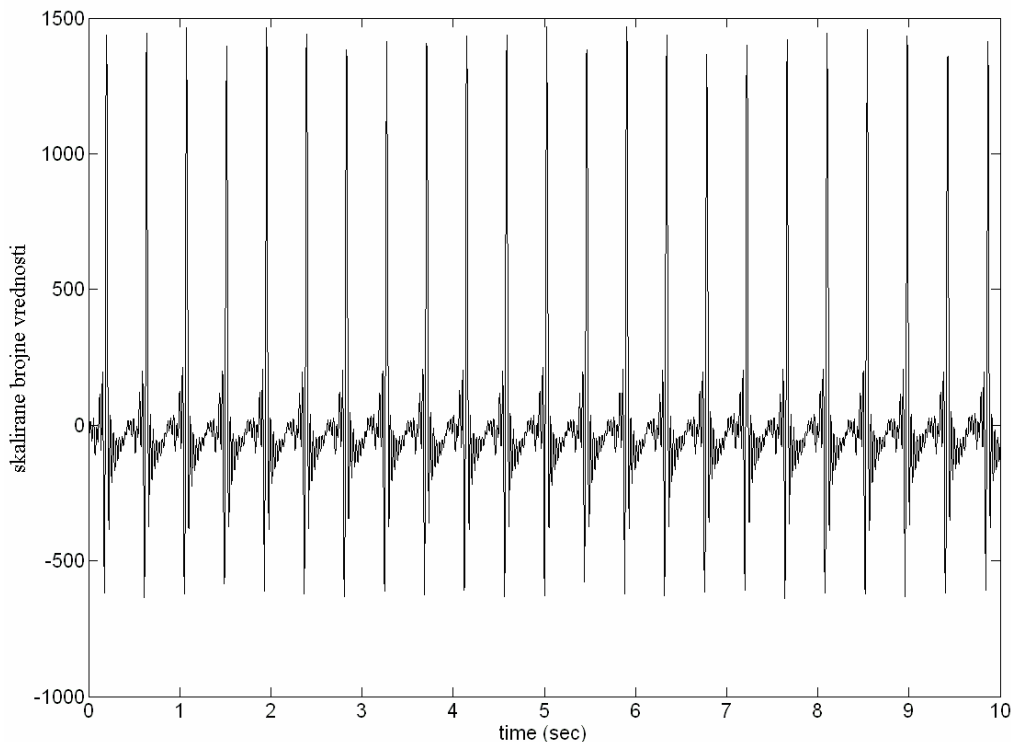
Prvi simulirani artefakt predstavlja povorku impulsa. Uz pomoć ovog signala modelovan je talasni segment koji simulira R talas QRS kompleksa koji se javlja na kanalima EEG signala. Pojavljivanje pikova u ovom signalu je kvaziperiodično. Oni su generisani tako da što približnije oponašaju srčanu aktivnost i da se pojava pika javlja na mestima gde bi se očekivala pojava maksimuma R talasa u QRS kompleksu. Kreiran je algoritam koji na osnovu statističke raspodele EKG signala generiše pozicioniranje pikova. Tako je dobijen signal koji je vremenski korelisan sa srčanim ritmom. Na slikama 5.6 do 5.9 prikazani su respektivno: EEG signal sa prisutnim stvarnim EKG artefaktom, EKG signal, uvećani segment EKG signala sa QRS kompleksom i modelovani EKG artefakt u vidu povorke impulsa. Napomenimo da signal EKG–a predstavlja veličinu napona koja se izražava u voltima. U simulacijama su korišćene brojne vrednosti EKG–a koje su dobijene množenjem odgovarajućim skalirajućim faktorom.

Drugi artefakt koji je generisan je signal sinusoidalnog oblika sa frekvencijom od 2 Hz (slika 5.9). Ova sinusoida odgovara artefaktu pulsacija koji se pojavljuje na elektrodama koje se nalaze u blizini krvnog suda. Veličina od 2 Hz izabrana je kao veličina koja je bliska frekvenciji otkucaja srca kod novorođenčadi.

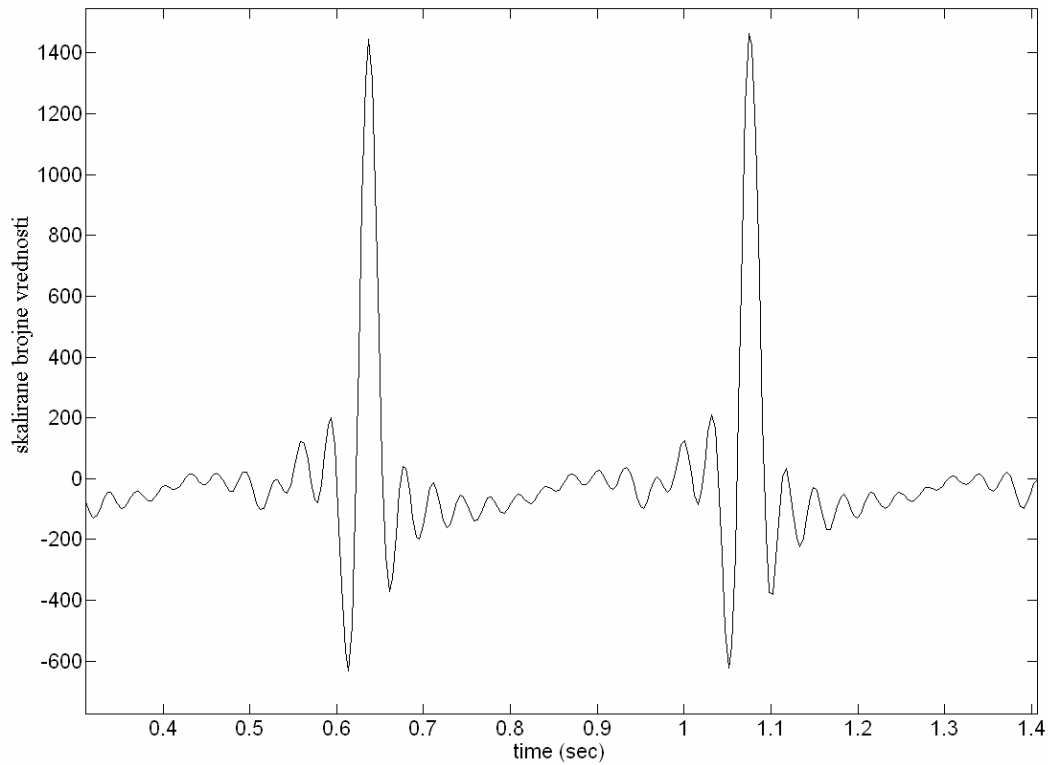
Prema ICA standardima oba modelovana artefakta su kreirana da im je očekivana srednja vrednost nula i oni su standardizovani na jediničnu varijansu. Na ovaj način EKG artefakt je modelovan kao kombinacija visoko dinamičnog signala (povorka impulsa) i vremenski korelisanog, sporo promenljivog signala (sinusoide).



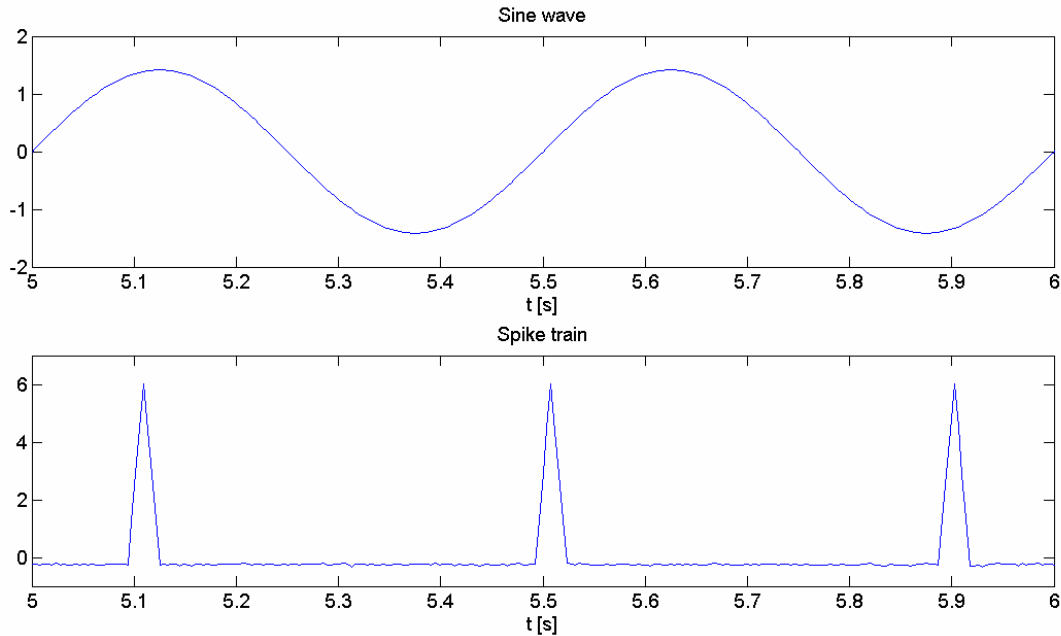
Slika 5.6. EKG artefakti koji se pojavljuju u EEG signalu. Na kanalima T5–O1 i Fz–Pz vidi se očigledna korelisanost sa QRS kompleksom signala EKG–a



Slika 5.7. Simultano snimljeni signal EKG–a u kome se jasno vidi izražen QRS kompleks



Slika 5.8. Uvećani deo EKG signala, kako bi se uočio QRS kompleks i R talas koji kreira lokalni maksimum



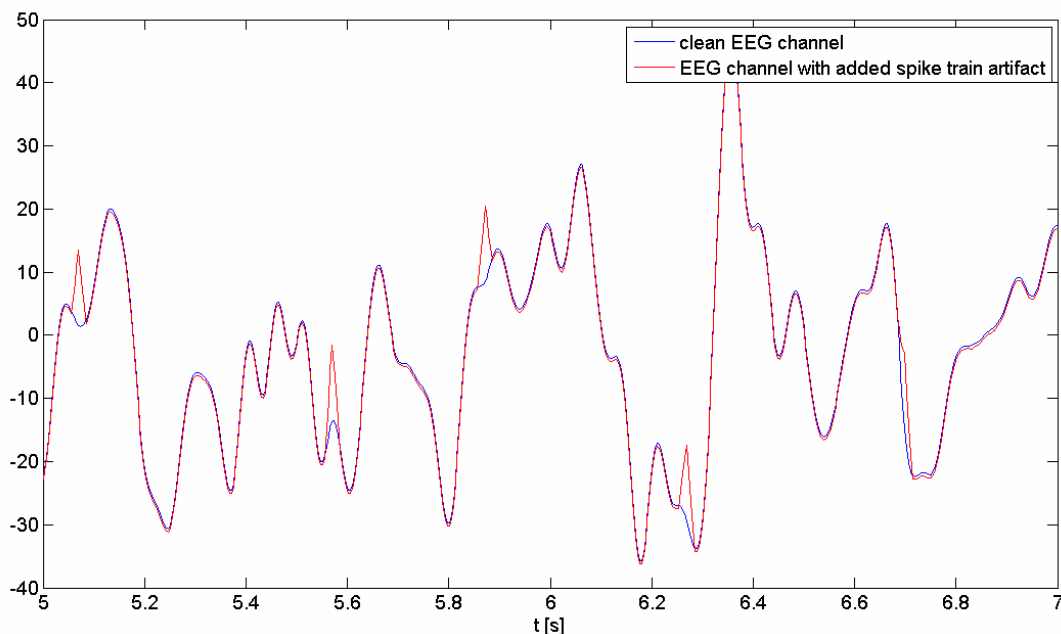
Slika 5.9. Modelovani EKG artefakti koji se superponiraju na EEG signal. Gornja slika predstavlja sinusoidu 2Hz, dok je na donjoj predstavljena povorka impulsa. Preuzeto iz [9]

Modelovani artefakti su dodavani na čist neonatalni EEG signal tako da su uvek oba tipa artefakta superponirana na po dva EEG kanala. Algoritam za superponiranje isprojektovan je tako da se na jedan EEG kanal može dodati samo jedan od modelovanih artefakta. Dodavanje artefakta na kanale vršeno je proizvoljno, a izvršavanjem velikog broja testova postigli smo ravnopravnost da svi kanali budu podjednako zastupljeni sa oba tipa artefakta. Računanje odgovarajućih parametara kojima smo kvantifikovali algoritme uvek je vršeno nakon velikog broja testova i ponavljanja kako bi se postigla što veća objektivnost.

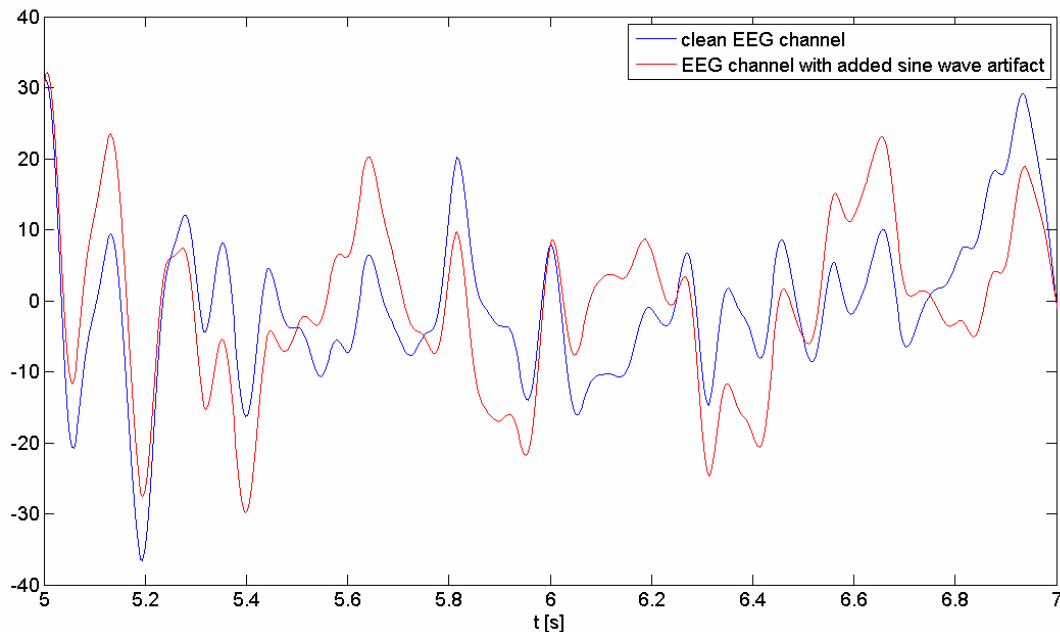
Superponiranje artefakta može se matematički opisati sledećom jednačinom:

$$x(t) = EEG(t) + \mathbf{B} \cdot s_{EKG}(t) = \mathbf{A} \cdot s(t) \quad (5.1)$$

gde matrica  $\mathbf{B}$  predstavlja matricu miksovanja EKG artefakta. Broj redova matrica  $\mathbf{B}$  definisan je brojem kanala EEG signala i ona je uvek posedovala 2 kolone—za dva tipa artefakta. Prema prethodno definisanim uslovima, matrica  $\mathbf{B}$  sastoji se dakle od četiri nenulta elementa, tako da se u svakoj koloni nalaze po dva, a u jednom redu može se pojaviti najviše jedan nenulti element. Varijacija vrednosti nenulatih elemenata u matrici  $\mathbf{B}$  određuje praktično u kojoj meri je EEG signal zašumljen EKG artefaktima. U našim testiranjima ove elemente smo menjali u rasponu koji je definisao šum EKG artefakta kao veoma mali, pa sve do značajnog i sa velikim stepenom degradacije (kakva se može sresti u praksi). Izgled jednog EEG kanala sa superponiranim artefaktima prikazani su na slikama 5.10 i 5.11.



Slika 5.10. Prikaz jednog kanala EEG signala: čist EEG signala (plavo) i EEG signal sa superponiranim artefaktom povorke impulsa (crveno)



Slika 5.11. Prikaz jednog kanala EEG signala: čist EEG signal (plavo) i EEG signal sa superponiranim sinusoidalnim artefaktom (crveno)

### 5.3. Kriterijumi za poređenje ICA algoritama

Prvi korak pri testiranju efikasnosti ICA algoritama je uspešna identifikacija nezavisnih komponenti. Nezavisne komponente (izlazni signali ICA algoritama) su poređeni sa modelovanim EKG artefaktima. Kao stepen poređenja dva signala korišćena je apsolutna vrednost korelacije:

$$\max_j |corr(s_{ECG}(i), \hat{s}(j))| \quad (5.2)$$

gde su indeksne vrednosti za  $i$  bile 1 ili 2 ( $s_{ECG}(1)$  – sinusoidni EKG artefakt,  $s_{ECG}(2)$  – EKG artefakt povorke impulsa), dok su se vrednosti indeksa  $j$  kretale u intervalu od 1, pa do ukupnog broja elemenata nezavisnih komponenti i ovaj broj je uvek zavisio od primenjenog algoritma. Na ovaj način izvršili smo uparivanje komponenata modelovanog artefakta i njihovih ICA estimacija. Po načinu kreiranja ovi signali su nulte očekivane srednje vrednosti i svedeni su na jediničnu varijansu. Poređenje ICA algoritama vrši se na osnovu uparenih komponenti, računanjem sledeća dva parametra za poređenje.

#### 1) Kriterijum zasnovan na korelaciji

*Spearman*–ov korelacioni koeficijent  $r$  [1] pokazao se kao dobar pokazatelj za poređenje originalnog modelovanog EKG artefakta i njemu uparene nezavisne ICA komponente. On pokazuje normalizovane vrednosti između 0 i 1 nezavisno od znaka signala. Vrednosti bliske jedinici pokazuju da je signal veoma uspešno estimiran. Važna karakteristika ovog parametra je

da on poređenje vrši na osnovu relativnog oblika samog signala. *Spearman*–ov korelacioni koeficijent  $r$  izračunava se pomoću sledeće formule:

$$r = 1 - 6 \sum \frac{d^2}{N(N^2 - 1)} \quad (5.3)$$

gde  $d$  predstavlja razliku statističkog rang signala, dok  $N$  odgovara dužini signala, odnosno broju elemenata. Osnovna ideja je da se prvo kreiraju pomoćni nizovi koji predstavljaju rastući sortirane originalne signale. Ovaj niz određuje statistički rang prvobitnog niza. Na taj način statistički rang elementa sa najmanjom vrednošću u nizu je 1, dok je rang elementa sa maksimalnom vrednošću  $N$ . Originalni signali se poređuju element po element, porede se odgovarajući statistički rangovi elemenata za oba niza i na taj način se određuje razlika statističkog ranga  $d$ .

*Spearman*–ov korelacioni koeficijent računa se posebno za svaki tip EKG artefakta i za svaki ICA algoritam. Dobre separacione odlike ICA algoritama, okarakterisane su višim vrednostima *Spearman*–ovog koeficijenta.

## 2) Root–Mean Square Error

*Root–Mean Square Error*–RMSE predstavlja standardni statistički metod i primenjuje se na signale izvora  $s$  (ECG artefakt) i na odgovarajuće uparene komponente  $y$  (ICA komponente). Važno je ponovo istaći da je svim signalima očekivana srednja vrednost svedena na nulu i da su njihove varijanse jedinične. Bez poštovanja ovih uslova poređenje ovom metodom ne bi bilo adekvatno.

Kao što je već prethodno definisano ICA algoritmi određuju nezavisne komponente, ali njihov znak ostaje nepoznat. Pre izračunavanja parametra RMSE za dva signala potrebno je proveriti da li su ovi signali istog znaka. U slučaju da nisu signal koji predstavlja ICA nezavisnu komponentu potrebno je invertovati, pa tek onda pristupiti izračunavanju. Sam RMSE parametar izračunava se po sledećoj formuli:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (s(k) - y(k))^2}{N}} \quad (5.4)$$

## 6. Rezultati računarskih simulacija

Računarske simulacije korišćene su za izračunavanje kriterijumskih parametara za poređenje ICA algoritama. U tu svrhu korišćen je programski paket MATLAB 7.4. (*Mathworks*) u kome su implementirane odgovarajuće funkcije i algoritmi. Shodno mernim rezultatima, simulacije su vršene sa frekvencijom odabiranja od 256 Hz. Procesirani signali su bili dužine 30 sekundi. Ova vrednost pokazala se kao optimalna za posedovanje dovoljnog broja elemenata da bi ICA algoritmi efikasno radili, a da uz to računaska kompleksnost ne bude prevelika.

Glavni algoritam koji se izvršava može se opisati sledećim koracima. Redosled izvršavanja prikazan je blok dijagramom na slici 6.1.

- 1) Inicijalizacija. Prvi korak u računarskim simulacijama predstavlja kreiranje signala na kojim će se primenjivati ICA algoritmi. Učitava se snimljeni EEG signal dužine 30 sekundi. Ovaj signal propušta se kroz dva *notch* filtra sa frekvencijama od 50 Hz i 100 Hz kako bi se uklonila interferencija koju prouzrokuje električna mreža. U našim simulacijama korišćen je 20 kanalni EEG signal koji se centriraju tako da njegova očekivana srednja vrednost bude nula.
- 2) Na slučajan način biraju se četiri različita kanala od 1 do 20. Na ovaj način kreirana je matrica **B** i ona će se množiti sa faktorom **K**.
- 3) Formiraju se signali EKG artefakta. Oba tipa artefakta se centriraju i dele svojom standardnom devijacijom, kako bi se njihova varijansa podesila na jediničnu. Osobina standardizacije koristi se da bi se ove komponente kasnije mogle upoređivati sa ICA estimiranim komponentama. Kreira se faktor kojim će se množiti elementi matrice **B**. Eksperimentalno je odabrano da se faktor **K** izračunava po sledećoj formuli:

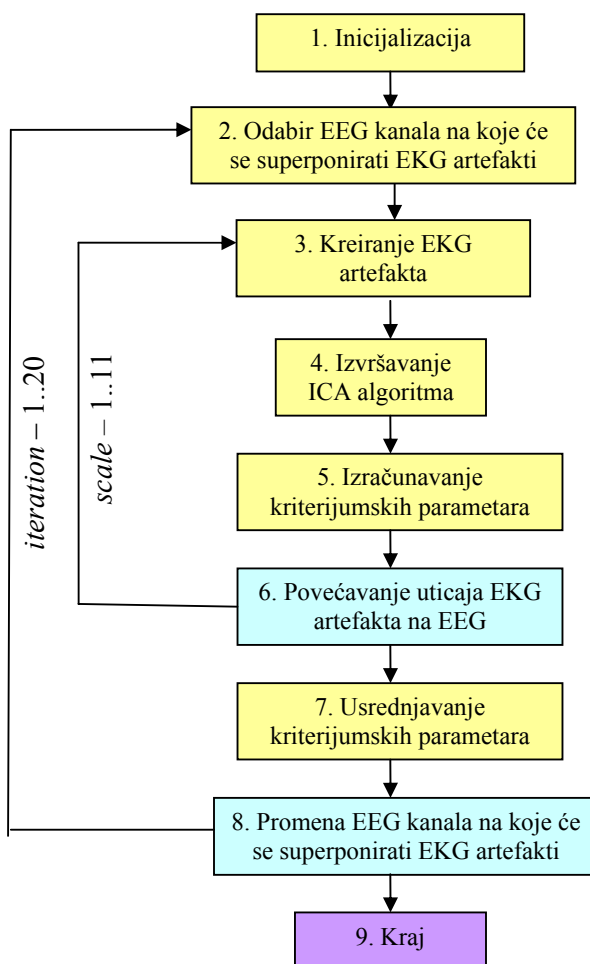
$$K = 0.005 \cdot 2^{scale} \quad (6.1)$$

*scale* indikator je iteracioni faktor i u simulacijama se kreće od 1 do 11. Faktor **K** utiče na intenzitet šuma koji se superponira sa čistim EEG signalom. Nakon izračunavanja faktora **K** i na osnovu matrice **B** kreira se zašumljeni EEG signal **x**:

$$x = EEG + K \cdot \mathbf{B} \cdot s_{ECG} \quad (6.2)$$

- 4) Za kreirani signal **x**, izvršavaju se sva četiri ICA algoritma: RobustICA, SOBI, JADE, CCA. Korišćeni algoritmi se mogu pronaći na internetu i razvijeni su od strane autora koji su kreirali ove algoritme [2, 3, 16, 5]. U ovim radovima nalaze se internet adrese na kojima su dostupni ICA algoritmi.
- 5) Na osnovu izlaznih komponenta računaju se *Spearman*-ov korelacioni koeficijent i RMSE za svaki ICA algoritam posebno.
- 6) Algoritam se vraća na korak 3, zadržavajući faktor **K**. Vrednost parametra *scale* se inkrementira, a kada se dostigne vrednost 11 prelazi se na korak 7)
- 7) Izračunava se srednja vrednost *Spearman*ovog korelacionog koeficijenta i RMSE za svaki ICA algoritam.
- 8) Povećava se vrednost iteracionog koeficijenta *iteration* i algoritam se vraća na korak 2). Kada iteracioni koeficijent dostigne vrednost 20 prelazi se na korak 9).
- 9) Kraj algoritma.





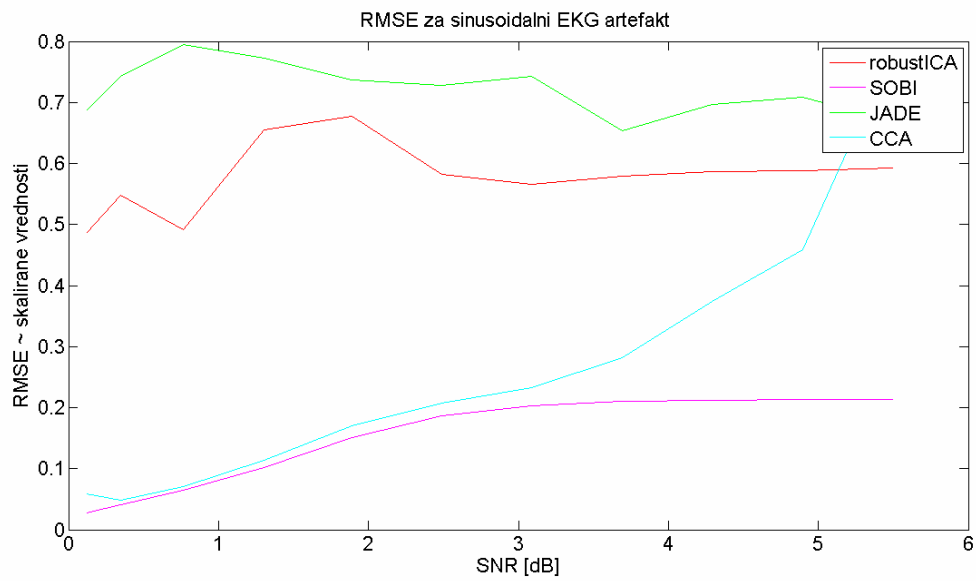
Slika 6.1. Blok dijagram algoritma za upoređivanje efikasnosti ICA algoritama

Izvršavanjem ove simulacije dobijaju se sledeće vrednosti za *Spearman*-ov korelacioni koeficijent (Tabela 6.1). Vidimo da su algoritmi SOBI i CCA bili uspešni u ekstrakovanju sinusoidalnog EKG artefakta, dok je algoritam RobustICA bio najefikasniji za estimaciju povorke impulsa.

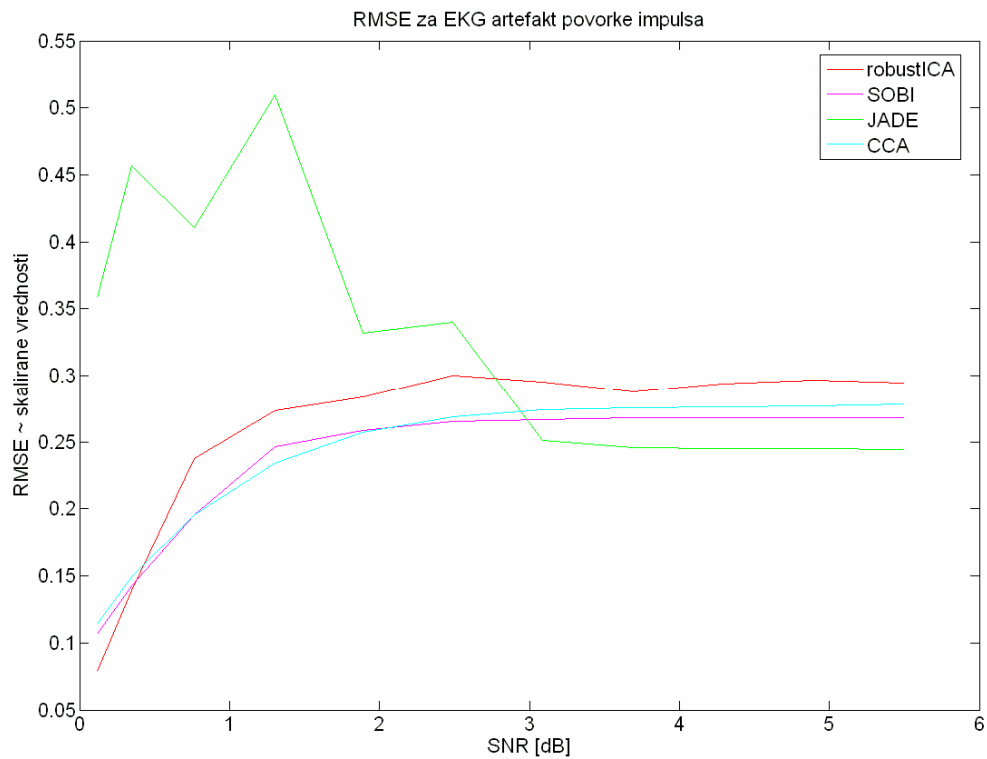
| EKG artefakt    | RobustICA | SOBI  | JADE  | CCA   |
|-----------------|-----------|-------|-------|-------|
| Sinusoidalni    | 0.872     | 0.999 | 0.723 | 0.995 |
| Povorke impulsa | 0.689     | 0.397 | 0.321 | 0.399 |

Tabela 6.1. Usrednjeni *Spearman*-ov korelacioni koeficijent

Drugi parametar kojim je vršeno poređenje ICA algoritama je RMSE i njegove vrednosti su prikazane grafički na slikama 6.2 i 6.3. Na  $x$  osi predstavljen je uticaj EKG artefakta na EEG signal preko standardne veličine SNR u dB. Niske vrednosti SNR (bliske nuli) odgovaraju veoma jakom šumu, dok vrednosti SNR bliske 6 dB odgovaraju praktično zanemarljivom šumu. Uticaj EKG artefakta na signal EEG-a kakav se najčešće sreće u praksi nalazi se u opsegu od 1 do 4 dB.



Slika 6.2. RMSE za sinusoidalni EKG artefakt



Slika 6.3. RMSE za EKG artefakt povorke impulsa

## 7. Diskusija i zaključak

Dobijeni rezultati u glavi 6. potvrđuju teorijske pretpostavke o efikasnosti ICA algoritama kada se primenjuju na odgovarajuće klase signale. Naime, algoritmi koji se zasnivaju na vremenskoj koherentnosti (SOBI, CCA) bili su veoma uspešni u separaciji sinusoidalnog signala. Dodatno, SOBI algoritam je pokazao veoma dobre performanse čak i pri niskim amplitudama EKG artefakta. U separaciji signala povorke impulsa, algoritmi zasnovani na maksimizaciji negausijanstva (RobustICA, JADE) pokazali su bolje performanse.

Generalno, posmatrajući dobijene rezultate možemo zaključiti da je za separaciju signala povorke impulsa najbolje primenjivati RobustICA algoritam, dok je za separaciju sinusoidalnog signala najbolje koristiti SOBI algoritam. Kako smo EKG artefakt modelovali kao kombinaciju ova dva signala, možemo zaključiti da je prema dobijenim parametrima, kao kompromisno rešenje, najbolje koristiti SOBI algoritam za ekstrakciju EKG artefakta.

Osnovno pitanje koje se može postaviti na rezultate dobijene u glavi 6. odnosi se na njihovu validnost i opravdanost primene ICA teorije na uklanjanje EKG artefakta iz EEG signala. Da bi se osnovni ICA model definisan jednačinom (3.2), mogao primeniti važno je da barem aproksimativno budu zadovoljeni sledeći uslovi: statistička nezavisnost izvornih komponenti, trenutno miksovanje izvornih signala (zanemarivanje kašnjenja) i stacionarnost miksujućih i nezavisnih komponenti.

Ukoliko se posmatra nezavisnost komponenti EKG artefakta i izvornih komponenti koje potiču iz kortikalne aktivnosti uočava se njihova neurološka zavisnost. Tako, na primer, ukoliko se doživi neko emotivno stanje (strah, radost), ono će biti praćeno odgovarajućom kognitivnom aktivnošću u kori velikog mozga, a to može prouzrokovati ubrzani rad srca. Međutim, ovakva fiziološka zavisnost ne ograničava upotrebu ICA modela, jer je za nas isključivo od interesa statistička raspodela amplituda signala EEG i EKG artefakata. U radu [21] je pokazano da se artefakti zaista mogu ekstrahovati iz EEG signala na osnovu ICA teorije i da su oni zaista statistički međusobno nezavisni.

Postoje pristupi i radovi koji procesiranje EEG signala zasnivaju na konvolutivnom ICA modelu koji u osnovni model uvodi kašnjenje izvornih signala u miksujućem procesu [10]. Međutim, kako većina energije EEG signala leži ispod 1kHz mogu se primeniti Maxwell–ove kvazistatičke jednačine [19]. Na osnovu njih, možemo pretpostaviti da je propagacija signala trenutna i nije potrebno uvoditi vremensko kašnjenje u ICA model.

Kada se izvorni signali posmatraju kao stohastički proces, zahteva se da ovi procesi budu stacionarni kako bi se obezbedila adekvatna egzistencija estimiranih ICA komponenta. U implementaciji ICA algoritama koriste se odbirci (semplovi) ovih signala i oni se posmatraju kao slučajne promenljive. Njihove raspodele se procenjuju iz ukupnog skupa odbiraka, te stoga nestacionarnost EEG signala ne narušava pretpostavke o ICA modelu [20].

U toku proučavanja statističkih karakteristika šuma EKG–a posmatrao se signal EEG signala sa prisutnim stvarnim EKG artefaktima. Ovaj signal je dekomponovan na ICA komponente i analizirane su one nezavisne komponente za koje se pretpostavljalo da potiču od aktivnosti srčanog mišića. U ovim komponentama uočeni su segmenti koji su međusobno korelisani i javljali su se u trenucima pojave maksimuma R talasa QRS kompleksa. Dužina ovih segmenata je aproksimativno odgovarala jednoj trećini dužine srčanog ciklusa i oni su bili pozicionirani simetrično oko vremenskog trenutka u kome se javljao maksimum R talasa QRS kompleksa. Ova osobina je bila jedinstvena samo za EKG komponente i može se koristiti pri ekstrakciji obeležja (*feature extraction*) EKG artefakta. Koristeći se ovako dobijenim obeležjem mogu se unaprediti algoritmi koji klasifikuju ICA komponente kao EKG artefakte.

## Literatura

- [1] M. Klemm, J. Haueisen and G. Ivanova, "Independent component analysis: comparison of algorithms for the investigation of surface electrical brain activity". *Med Biol Eng Comput*, vol 47, pp. 413–423, 2009.
- [2] V. Zarzoso and P. Comon, "Comparative Speed Analysis of FastICA". Proceedings ICA–2007, pp. 293–300, 2007.
- [3] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.F. Cardoso and E. Moulines, "A blind source separation technique using second order statistics". *IEEE Trans. Signal Processing*, 45: 434–444, 1997.
- [4] A. Hyvärinen, J. Karhunen and E. Oja, "Independent Component Analysis". John Wiley & Sons, 2001.
- [5] W. Clercq, A. Vergult, B. Vanrumste, W. Van Paesschen and S. Van Huffel "Canonical Correlation Analysis Applied to Remove Muscle Artifacts From the Electroencephalogram". *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2006.
- [6] S. Sanei, J.D. Chambers, "EEG Signal Processing". John Wiley & Sons Ltd, 2007.
- [7] J. F. Cardoso, A. Saouloumiac, "Blind Beamforming for Non Gaussian Signals" *IEEE Proceedings*, vol. 140, no 6, pp. 362–370. 1993.
- [8] S. Makeig, A. J. Bell, T.-P. Jung, and Sejnowski TJ, "Independent component analysis of Electroencephalographic data." *Advances in Neural Information Processing Systems* 8, 145-151,1996.
- [9] V. Matic, W. Deburchgraeve, S. Van Huffel, "Comparison of ICA algorithms for ECG artifact removal from EEG signals". *Proceedings 4th Annual symposium of the IEEE-EMBS Benelux Chapter*, University of Twente, The Netherlands, November 9–10, 2009, pp. 137-140.
- [10] S. Devuyst, T. Dutoit, "Cancelling ECG artifacts in EEG using a modified independent component analysis approach", *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Jan. 2008.
- [11] P. Comon, "Independent component analysis, a new concept?" *Signal Processing*, Volume 36, Issue 3, 1994.

- [12] M. De Vos, S. Van Huffel, “Spatially constrained Independent Component Analysis algorithm for real-time eye artifact removal from the Electroencephalogram”, *IEEE Benelux EMBS Symposium*, 2006.
- [13] P. Strobach, K. Fuchs “Event-Synchronous Cancellation of the Heart Interference in Biomedical Signals”, *IEEE TRANSACTIONS ON BIOMEDICAL ENGINEERING*, VOL. 41. NO. 4, APRIL 1994.
- [14] J.-P. Lanquart, M. Dumont, and P. Linkowski, “QRS artifact elimination on full night sleep EEG,” *Medical Engineering and Physics*, vol. 28, no. 2, pp. 156–165, 2006.
- [15] J. Iriarte, E. Urrestarazu, M. Valencia, “Independent component analysis as a tool to eliminate artifacts in EEG: a quantitative study,” *Journal of Clinical Neurophysiology*, vol. 20, no. 4, pp. 249–257, 2003.
- [16] S.V. Vaseghi, "Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction" John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- [17] A. J. Bell, T. J. Sejnowski “An information-maximization approach to blind separation and blind deconvolution”. *Neural Computation* 7(6):1129-59., 1995.
- [18] <http://en.wikipedia.org/wiki/Electrocardiography>.
- [19] Hamalainen, R. Hari, R. Ilmoniemi, J. Knuutila, O. V. Lounasmaa. “Magnetoencephalography—theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain”. *Reviews of Modern Physics*, 65(2):413–497, 1993.
- [20] S. Blanco, H. Garcia, R. Quian Quiroga, L. Romanelli, O. A. Rosso. “Stationarity of the EEG series.” *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, pages 395–399, 1995.
- [21] R. Vigarío. “Extraction of ocular artifacts from EEG using independent component analysis.” *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.*, 103(3):395–404, 1997.
- [22] D. Popović, M. Popović “Biomedicinska instrumentacija i merenja”. Nauka. 1997.